详细解答

STEP III 2002，第 7 题

纯数学 · 坐标几何恒等式

STEP III 2002，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q7

关键思路

$s^2+b^2-a^2$ 这个式子应该似曾相识：在三角形 OAB 中（其中 $OA=s$、$OB=b$）使用余弦定理（cosine rule），得出的正是这个式子。因此，第一个恒等式（identity）其实就是开首关于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$ 的结果，应用于 OB 与两条坐标轴所成的两个角。其后，第二个恒等式纯粹是建基于第一个恒等式的代数运算，而不等式（inequality）亦随之而来，因为两个平方之和必不小于其中任何一个平方。

解答

关于角的结果

首先假设 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$。则 $\cos\beta=\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=\sin\alpha$，所以

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

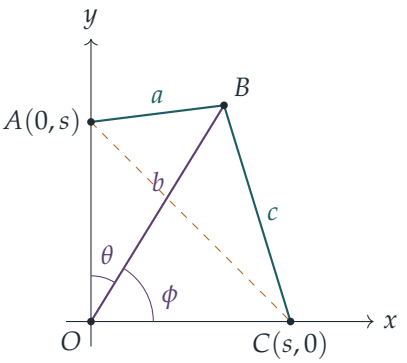
反过来，假设 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$。则 $\cos^2\beta=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$。$\alpha$ 和 β 都是锐角（acute angle），所以 $\cos\beta>0$ 且 $\sin\alpha>0$，取正平方根便得

$$\cos\beta=\sin\alpha=\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha).$$

现在 β 和 $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ 都在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 之内，而余弦在这个区间上严格递减（strictly decreasing），因此每个值只取一次。故此 $\beta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$，即 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$。这就证明了“当且仅当”（if and only if）。

第一个恒等式

设 $\theta=\angle AOB$ 及 $\phi=\angle BOC$。



在三角形 OAB（边长 $OA = s$、$OB = b$、$AB = a$）和三角形 OCB（边长 $OC = s$、$OB = b$、$CB = c$）中使用余弦定理，得

$$\cos\theta = \frac{s^2 + b^2 - a^2}{2sb}, \qquad \cos\phi = \frac{s^2 + b^2 - c^2}{2sb}.$$

由于 B 位于开的第一象限（open first quadrant）内，射线 OB 严格地夹在正 y 轴（沿 OA 方向）与正 x 轴（沿 OC 方向）之间。所以 θ 和 ϕ 都是锐角，且 $\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$。根据上面“仅当”的方向，$\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$，即

$$\frac{(s^2 + b^2 - a^2)^2}{4s^2b^2} + \frac{(s^2 + b^2 - c^2)^2}{4s^2b^2} = 1.$$

两边乘以 $4s^2b^2$，便得第一个恒等式：

$$(s^2 + b^2 - a^2)^2 + (s^2 + b^2 - c^2)^2 = 4s^2b^2.$$

（若要直接验证，可设 $B = (x, y)$。则 $a^2 = x^2 + (y - s)^2$、$b^2 = x^2 + y^2$ 及 $c^2 = (x - s)^2 + y^2$，所以 $s^2 + b^2 - a^2 = 2sy$ 及 $s^2 + b^2 - c^2 = 2sx$，而左方等于 $4s^2(x^2 + y^2) = 4s^2b^2$。）

第二个恒等式

为了令代数运算保持整洁，设

$$P = s^2 + b^2 - a^2, \qquad Q = s^2 + b^2 - c^2, \qquad S = s^2 + b^2, \qquad D = s^2 - b^2,$$

于是 $a^2 = S - P$ 及 $c^2 = S - Q$。第一个恒等式说的是 $P^2 + Q^2 = 4s^2b^2$。由于 $4s^2b^2 = (s^2 + b^2)^2 - (s^2 - b^2)^2 = S^2 - D^2$，它可以改写成

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2. \tag{†}$$

现在 $a^2 + c^2 = 2S - P - Q$，而 $2s^2 = S + D$、$2b^2 = S - D$，所以

$$2s^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) + D, \qquad 2b^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) - D.$$

想一想 为甚么值得把它们拆成 $(P+Q-S)\pm D$ 的形式?

因为 $(u+D)^2+(u-D)^2=2u^2+2D^2$：交叉项互相抵销，于是 D 只以 D^2 的形式出现，而 (†) 让我们可以把它换成只涉及 P、Q 和 S 的式子。取 $u=P+Q-S$，

$$\begin{aligned}&(2s^2-a^2-c^2)^2+(2b^2-a^2-c^2)^2\\&\quad=2(P+Q-S)^2+2D^2\\&\quad=2(P^2+Q^2+S^2+2PQ-2PS-2QS)+2(S^2-P^2-Q^2)\\&\quad=4S^2-4PS-4QS+4PQ\\&\quad=4(S-P)(S-Q)\\&\quad=4a^2c^2,\end{aligned}$$

其中第二行用了 (†)。这就是第二个恒等式。

不等式

第二个恒等式左方的两个平方都是非负的，所以

$$(2b^2-a^2-c^2)^2\le 4a^2c^2,\qquad \text{所以}\qquad |2b^2-a^2-c^2|\le 2ac,$$

这里取了非负平方根（注意 $a,c>0$）。这即是说

$$-2ac\le 2b^2-a^2-c^2\le 2ac,$$

亦即

$$a^2-2ac+c^2\le 2b^2\le a^2+2ac+c^2,$$

也就是 $(a-c)^2\le 2b^2\le(a+c)^2$，正是所求。

等号恰好在 $2s^2=a^2+c^2$ 时成立。由于 $AC^2=2s^2$，根据毕氏定理的逆定理（converse of Pythagoras），这表示 $\angle ABC$ 是直角：B 位于以 AC 为直径的圆上。

验算

- 取 $s=2$ 及 $B=(1,3)$。则 $a^2=2$、$b^2=c^2=10$。第一个恒等式成为 $12^2+4^2=160=4\cdot4\cdot10$；第二个恒等式成为 $(-4)^2+8^2=80=4\cdot2\cdot10$；而不等式则是 $3.06\le 20\le 20.94$。
- 点 $B=(s,s)$ 是正方形的第四个顶点，所以 $\angle ABC$ 是直角，且 $a=c=s$、$b=s\sqrt{2}$：于是 $2b^2=4s^2=(a+c)^2$，正是等号成立的情况。
- 在 2×10^5 个点 B 上对全部三个结果作随机测试，没有发现任何不成立的情况。

常见错误

- 在逆命题中漏掉锐角这个条件：没有这个条件，$\cos^2\beta = \sin^2\alpha$ 并不能推出 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$（例如 $\beta = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ 同样满足）。
- 不利用第一个恒等式，而以 a, b, c, s 硬生生地展开第二个恒等式。这样做是可行的，但很容易漏掉某一项；采用 S、D 的代换，可令运算不致失控。
- 对 $(2b^2 - a^2 - c^2)^2 \leq 4a^2c^2$ 取平方根时漏掉绝对值（modulus），结果只得到不等式的其中一半。

STEP 之外

$2b^2 - a^2 - c^2$ 这个量等于 $2s(x + y - s)$，即三角形 ABC 面积的 ± 4 倍，所以第二个恒等式其实是把余弦定理和面积公式 $\frac{1}{2}ac\sin B$ 合并成 $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$。上界亦是托勒密不等式（Ptolemy's inequality）的一个特例：对任意四点，$OB \cdot AC \leq OA \cdot BC + OC \cdot AB$，而等号在圆内接四边形（cyclic quadrilateral）的情况下成立，在这里即是 $bs\sqrt{2} \leq s(a + c)$。这类距离之间的关系，可以引伸至度量空间（metric space）和距离几何（distance geometry）的研究；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题集）中有更多同类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。