详细解答

STEP III 2002，第 6 题

纯数学 · 非线性微分方程

STEP III 2002，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q6

关键思路

这条方程因为有四次方而显得吓人，但 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 正好是 y^2 的导数（derivative）的一半。因此作代换（substitution）$u = y^2 - 1$：方程随即化简为只含 u 和 u' 的方程，取平方根之后便可分离变量（separate variables）。唯一要小心的是正负号：u 的正负号把平面分成带状区域 $|y| < 1$ 和区域 $|y| > 1$，两者给出不同的曲线族（family of curves）。

解答

设 $u = y^2 - 1$，则 $u' = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，而 $y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (\frac{1}{2}u')^4$。方程变成

$$\tfrac{1}{16}(u')^4 = u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u')^2 = 4|u|,$$

这里对两边取非负平方根（$(u')^2$ 和 $4|u|$ 都是非负的，所以没有遗漏任何解）。

首先留意，解曲线（solution curve）永远不会与 $y = 0$ 相遇：在那里原方程的左边是 0，右边却是 1。所以凡经过任何一个给定点的解，都处处满足 $y > 0$。

? **想一想** 怎样解 $(u')^2 = 4u$，而不必为 u' 该取哪个正负号而烦恼?

在 $u > 0$ 之处，可以写 $u = v^2$，其中 $v = \sqrt{u} > 0$。于是 $u' = 2vv'$，所以 $(u')^2 = 4u$ 变成 $4v^2(v')^2 = 4v^2$，即 $(v')^2 = 1$。由于 v' 连续而且永不为零，它的正负号保持不变，所以 $v' = \pm 1$，并且 $v = \pm(x - a)$，其中 a 为某个常数。无论哪一种情况，都有

$$u = v^2 = (x - a)^2.$$

正负号的不确定性在平方之后自然消失。对 $u < 0$ 的情况，以 $u = -v^2$ 作同样的论证即可。

第 (i) 部分：经过 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

这里 $y^2 = \frac{3}{4} < 1$，所以在这点附近 $u < 0$，即 $|y| < 1$。写 $1 - y^2 = -u = v^2$，其中 $v > 0$；那么 $(u')^2 = -4u$ 给出 $(v')^2 = 1$，与上面完全一样，所以 $1 - y^2 = (x - a)^2$，也就是

$$(x - a)^2 + y^2 = 1 :$$

圆心在 x 轴上、半径为 1 的圆。在 $x = 0$ 处需要 $a^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$，所以 $a = \pm\frac{1}{2}$。由于 $y > 0$，经过 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ 的解曲线是上半圆

$$y = \sqrt{1 - (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad 及 \qquad y = \sqrt{1 - (x + \tfrac{1}{2})^2}.$$

直接验证：在 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 上，隐函数微分（implicit differentiation）给出 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x - a)$，所以 $y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (x - a)^4 = (1 - y^2)^2 = (y^2 - 1)^2$。✓

第 (ii) 部分：经过 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{5})$

现在 $y^2 = \frac{5}{4} > 1$，所以 $u > 0$，上面的论证给出 $y^2 - 1 = (x - a)^2$，也就是

$$y^2 - (x - a)^2 = 1 :$$

中心为 $(a, 0)$ 的等轴双曲线（rectangular hyperbola）。在 $x = 0$ 处，$a^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$，所以同样有 $a = \pm\frac{1}{2}$，而由于 $y > 0$，解曲线是上支

$$y = \sqrt{1 + (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad 及 \qquad y = \sqrt{1 + (x + \tfrac{1}{2})^2},$$

对所有 x 都有定义。直接验证：$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - a$，所以左边是 $(x - a)^4 = (y^2 - 1)^2$。✓

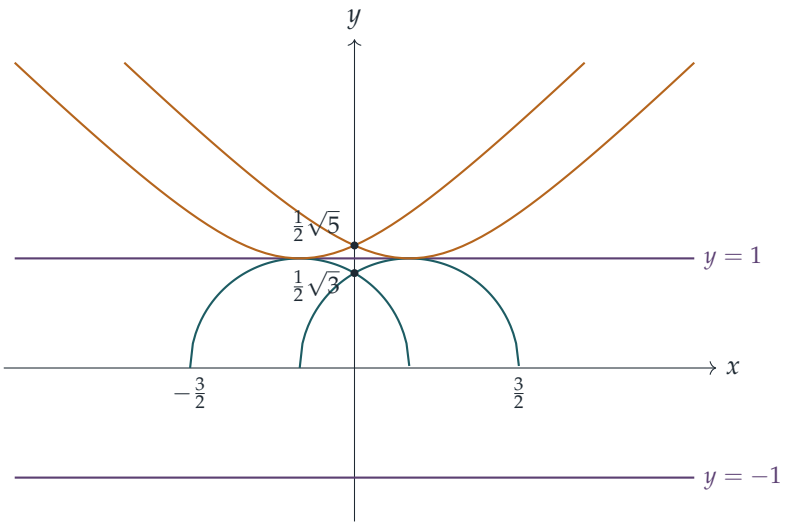
直线 $y = \pm 1$

若对所有 x 都有 $y = 1$ 或 $y = -1$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以左边是 0；而 $y^2 - 1 = 0$，所以右边也是 0。两条直线都是解。

想一想 这两条直线与那些圆和双曲线有甚么关系?

每个圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 和每条双曲线 $y^2 - (x - a)^2 = 1$ 都在 $(a, 1)$ 以零斜率与 $y = 1$ 相切（同样地，在 $(a, -1)$ 与 $y = -1$ 相切）。所以 $y = \pm 1$ 是这两个曲线族的包络线（envelope），而它们并不属于任何一族：它们来自 $u = 0$，而我们除以 v 时已把这情况排除在外。由此得出一个结果：经过 $y = 1$ 上的点的解并不唯一。例如，沿着 $a = \frac{1}{2}$ 的圆由 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ 走到它的顶点 $(\frac{1}{2}, 1)$，然后沿 $y = 1$ 走一段，再在 $x \geq b$ 时沿双曲线 $y = \sqrt{1 + (x - b)^2}$ 向上走（任意 $b \geq \frac{1}{2}$ 皆可），便得到一条足够光滑（斜率连续）而且处处满足方程的曲线。上面四条曲线是经过给定点的“基本”解；经过这些点的其他每一个解，都是由这些曲线、$y = 1$，以及其他与 $y = 1$ 相切的圆和双曲线的片段拼合而成。

略图



半圆（蓝绿色）的圆心为 $(\pm\frac{1}{2},0)$，半径为 1，在 $x=\pm\frac{1}{2}\pm1$ 处垂直地与 x 轴相遇，并在 $x=\pm\frac{1}{2}$ 处与 $y=1$ 相切。双曲线的分支（琥珀色）在同样的两点与 $y=1$ 相切，其渐近线（asymptote）为 $y=\pm(x\mp\frac{1}{2})$，即它们的增长与 $|x|$ 相若。每一对曲线都关于 y 轴对称，而每对的两条曲线在该轴上的给定点相交。

验算

- 在 $a=\frac{1}{2}$ 的圆上的点 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$：$y'=-(x-a)/y=1/\sqrt{3}$，所以左边是 $\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{16}$，而右边是 $(\frac{3}{4}-1)^2=\frac{1}{16}$。
- 由 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{5})$ 出发，取正号对 $y'=\pm\sqrt{|y^2-1|}/y$ 作数值积分，得 $y(1.5)=2.2360680$，与 $a=-\frac{1}{2}$ 的双曲线上的 $\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$ 吻合。

常见错误

- 在两个区域都把平方根取成 $(u')^2=4u$；对 $|y|<1$ 而言，这没有实数解，于是那些圆就遗漏了。
- 在每一步只保留平方根的其中一个正负号，结果经过每个点只找到一条曲线，而不是两条。
- 忘记了 $y=\pm1$ 并不属于任何一族，尽管它们与每一个成员都相切。

STEP 之外

直线 $y = \pm 1$ 是奇解（singular solution）：它们是通解（general solution）的包络线，无论常数 a 取甚么值都得不出来。它们恰恰出现在一阶方程的唯一性定理（皮卡–林德勒夫定理，Picard–Lindelöf）失效之处，因为 $\sqrt{|y^2 - 1|}$ 在 $y = \pm 1$ 处不满足利普希茨（Lipschitz）条件，这正是解可以在那里分岔的原因。这类包络线常见于对 y' 而言并非线性的一阶方程（克莱罗（Clairaut）方程是经典例子）；Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）讨论了存在性与唯一性，以及它们在甚么情况下失效。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。