详细解答

STEP III 2002，第 5 题

纯数学 · 四次方程的因式分解

> **STEP III 2002，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q5

关键思路

一个二次式是某个完全平方（perfect square）的常数倍，当且仅当它的判别式（discriminant）等于零。第一部分的全部内容就是这一点，而它也是其余部分的原动力：如果我们能选取 t，使得某个二次式的平方减去该四次式（quartic）后是一个完全平方的倍数，那么这个四次式就是*两个平方之差*（difference of two squares），可以立即因式分解（factorise）。这就是费拉里（Ferrari）解四次方程的经典方法，它把四次方程的问题换成一个关于 t 的三次方程（cubic）。

解答

二次式的条件

设 $p \neq 0$。配方（completing the square）得

$$px^2 + qx + r = p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}.$$

这个式子可写成 $p(x+h)^2$（h 为某个数）的形式，当且仅当常数 $r - \frac{q^2}{4p}$ 等于零，即

$$q^2 = 4pr,$$

此时 $h = \frac{q}{2p}$。（反过来，展开 $p(x+h)^2 = px^2 + 2phx + ph^2$ 可得 $q^2 = 4p^2h^2 = 4pr$，所以这个条件既是充分条件，也是必要条件。）若 $p = 0$，唯一的可能是 $q = r = 0$；条件 $q^2 = 4pr$ 仍然迫使 $q = 0$，但我们还需要 $r = 0$。

t 所满足的方程

展开得

$$(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t)^2 = x^4+bx^3+(\tfrac{1}{4}b^2+2t)x^2+btx+t^2.$$

选用 $\frac{1}{2}b$，正是为了在减去四次式时令 x^3 项互相抵消（x^4 项也同样抵消）：

$$(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t)^2-(x^4+bx^3+cx^2+dx+e) = (\tfrac{1}{4}b^2+2t-c)x^2+(bt-d)x+(t^2-e).$$

这是一个二次式，其中 $p=\frac{1}{4}b^2+2t-c$、$q=bt-d$ 及 $r=t^2-e$，而我们希望它等于 $k(x+h)^2$，即一个完全平方的倍数（倍数就是 $k=p$）。根据第一部分，t 必须满足

$$(bt-d)^2 = 4(\tfrac{1}{4}b^2+2t-c)(t^2-e).$$

这是一个关于 t 的三次方程（右边 t^3 项的系数是 8，而左边只是 t 的二次式），所以它必定有至少一个实根（real root）。

分解四次式

这里 $b=6$、$c=9$、$d=-2$、$e=-7$，所以

$$\tfrac{1}{4}b^2+2t-c = 2t, \qquad bt-d = 6t+2, \qquad t^2-e = t^2+7.$$

t 所满足的方程变成

$$\begin{aligned}(6t+2)^2 &= 8t(t^2+7)\\ 36t^2+24t+4 &= 8t^3+56t\\ 0 &= 2t^3-9t^2+8t-1.\end{aligned}$$

想一想 怎样才能快速找出这个三次方程的一个根?

先试较小的数值：各系数之和是 $2-9+8-1=0$，所以 $t=1$ 是一个根。任何一个根都可以用，因为每个根都给出一个有效的因式分解；最简单的根给出最简单的分解。

取 $t=1$，所得的差是

$$2x^2+8x+8 = 2(x+2)^2,$$

所以 $k=2$ 及 $h=2$，而且确实有 $8^2=4\cdot 2\cdot 8$。因此

$$(x^2+3x+1)^2-(x^4+6x^3+9x^2-2x-7) = 2(x+2)^2,$$

即

$$x^4+6x^3+9x^2-2x-7 = (x^2+3x+1)^2-(\sqrt{2}\,(x+2))^2.$$

这是两个平方之差，所以

$$\begin{aligned} x^4+6x^3+9x^2-2x-7 &= (x^2+3x+1-\sqrt{2}(x+2))(x^2+3x+1+\sqrt{2}(x+2)) \\ &= (x^2+(3-\sqrt{2})x+1-2\sqrt{2})(x^2+(3+\sqrt{2})x+1+2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

由于 $k=2>0$，它的平方根是实数，所以这是两个实系数的二次因式，正如题目所要求。

三次方程的另外两个根是由 $2t^2-7t+1=0$ 得出的 $t=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{41})$，它们同样满足 $k=2t>0$，并给出另外两种把四次式的四个（实）根配对成实二次因式的方法。这两种分解的系数繁复得多，所以应该选用 $t=1$。

验算

- 乘开：两个因式之积的 x^3 系数是 $(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$，常数项是 $(1-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})=1-8=-7$，两者皆正确。
- 当 $x=1$ 时，四次式的值是 $1+6+9-2-7=7$，而因式分解给出 $(5-\sqrt{2}-2\sqrt{2})(5+\sqrt{2}+2\sqrt{2})=25-18=7$。
- 两个因式的判别式分别是 $7+2\sqrt{2}\approx 9.83$ 和 $7-2\sqrt{2}\approx 4.17$，两者皆为正数，所以四次式有四个实根，这与三次方程的三个根全都给出实因式分解一致。我们亦在 200 个随机点上以数值方法核对过这个因式分解。

常见错误

- 把 $(x^2+\frac{1}{2}bx+t)^2$ 的 x^2 系数算错：它应是 $\frac{1}{4}b^2+2t$，因为除了 $(\frac{1}{2}bx)^2$ 之外，交叉项 $2\cdot x^2\cdot t$ 也有贡献。
- 把判别式条件写成 $q^2=pr$，或者忘记 k 就是首项系数（leading coefficient）$\frac{1}{4}b^2+2t-c$，而它必须是正数才能得到实因式分解。

STEP 之外

这个关于 t 的三次方程称为*预解三次式*（resolvent cubic），而这就是费拉里在十六世纪提出的方法：每个四次方程都可以化为一个三次方程，再用卡尔达诺（Cardano）公式求解。这个方法行得通的深层原因，以及一般五次方程（quintic）没有这类公式的原因，都属于伽罗瓦理论（Galois theory）的范畴，该理论研究的是多项式的根可以怎样置换（permute）。若想初步认识域（field）与多项式的代数，可以读 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。