详细解答

STEP III 2002，第 4 题

纯数学 · 丢番图不等式

STEP III 2002，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q4

关键思路

方程 $x^3+x^2=y^3-y^2$ 的一边增长得快，另一边却被 $-y^2$ 拖住，所以 y 必须“超越” x，但超出的幅度又不足 1。这两个不等式（inequality）把 y 严格夹在 x 与 $x+1$ 之间，而这个空隙容不下任何整数。至于最后一部分，额外的解只可能来自零或负数的取值，而一个巧妙的对称性（symmetry）——把 (m,n) 换成 $(-n,-m)$——可以把分类讨论的工夫减半。

解答

第一个结果

设 $x,y>0$ 且 $x^3+x^2=y^3-y^2$，并用反证法（proof by contradiction）假设 $x\geq y$。由于立方和平方在正实数上都是递增的，

$$x^3+x^2\geq y^3+y^2>y^3-y^2,$$

其中严格不等的一步用到 $y^2>0$。这与方程矛盾，所以 $x<y$。

第二个结果

现在设 $0<x\leq y-1$，于是 $y\geq x+1>1$。记 $f(t)=t^3-t^2$。那么当 $t>\frac{2}{3}$ 时，$f'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)>0$，所以 f 在 $[1,\infty)$ 上是递增函数（increasing function）。

由于 $y \geq x+1$，而且两者都在这个区间内，

$$\begin{aligned} y^3 - y^2 = f(y) &\geq f(x+1) = (x+1)^2((x+1)-1) \\ &= x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \\ &= (x^3 + x^2) + (x^2 + x) \\ &> x^3 + x^2, \end{aligned}$$

因为当 $x > 0$ 时 $x^2 + x > 0$。所以 $x^3 + x^2 < y^3 - y^2$，这正是所要证明的。

把两个结果合起来可知：对于正数 x，任何满足 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$ 的正数 y 都符合

$$x < y < x+1.$$

没有正整数对

假设正整数 a 和 b 满足 $a^3 - b^3 = a^2 + b^2$。右边是正数，所以 $a^3 > b^3$，即 $a > b$。移项后得

$$b^3 + b^2 = a^3 - a^2,$$

这正是上面的方程，其中 $x = b$、$y = a$，两者皆为正数。所以 $b < a < b+1$。

> **想一想** 整数这个条件究竟用在哪里?

只用在这里：没有整数严格介乎 b 与 $b+1$ 之间。换个说法，$a > b$ 而 a, b 都是整数，就必有 $a \geq b+1$，即 $0 < b \leq a-1$，于是第二个结果给出 $b^3 + b^2 < a^3 - a^2$，与方程矛盾。所以这样的正整数对并不存在。（若在实数范围内，解多的是：对每个 $x > 0$ 都有一个 $y \in (x, x+1)$；只是整数刚好碰不上它们。）

所有整数对

现在要找出所有整数 m, n，使得

$$m^3 - n^3 = m^2 + n^2. \qquad (*)$$

以下两点观察可以省却不少工夫。

- 若 (m, n) 是解，则 $(-n, -m)$ 也是解：事实上 $(-n)^3 - (-m)^3 = m^3 - n^3$，而平方和保持不变。
- $(*)$ 的右边非负，所以 $m^3 \geq n^3$，即 $m \geq n$，而等号只在 $m^2 + n^2 = 0$ 时成立，即 $m = n = 0$。

其中一个是零。若 $n = 0$，则 $m^3 = m^2$，所以 $m = 0$ 或 $m = 1$。若 $m = 0$，则 $-n^3 = n^2$，所以 $n = 0$ 或 $n = -1$。这样得到 $(0,0)$、$(1,0)$ 和 $(0,-1)$（最后一个是 $(1,0)$ 在上述对称下的像）。

两个都是正数。根据上一部分，这是不可能的。

两个都是负数。这时 $-n$ 和 $-m$ 都是正数，而 $(-n,-m)$ 就会是一个两项皆正的解，这是不可能的。

正负号相反。由于 $m>n$，我们有 $m>0>n$。记 $n=-p$，其中 $p\geq 1$。那么 $(*)$ 变成

$$m^3+p^3=m^2+p^2, \qquad \text{即} \qquad m^2(m-1)+p^2(p-1)=0.$$

对于正整数，两项都 ≥ 0，所以两项都等于零，于是必有 $m=p=1$。这样得到 $(1,-1)$，而确实 $1-(-1)=2=1+1$。

所以 $m^3-n^3=m^2+n^2$ 的整数解 (m,n) 恰好是

$$(m,n)=(0,0),\quad (1,0),\quad (0,-1),\quad (1,-1).$$

如果“整数对”的意思不包括平凡（trivial）的那一对，就剔除 $(0,0)$。

验算

每一对都可以用手验算：对于 $(1,0)$，$1-0=1=1+0$；对于 $(0,-1)$，$0-(-1)=1=0+1$；对于 $(1,-1)$，$2=2$。用电脑搜索所有 $|m|,|n|\leq 300$ 的情况，找到的正好是这四个解。至于头两个结果的验算：对随机选取的 $x>0$ 以数值方法解 $y^3-y^2=x^3+x^2$，每次都得到 $x<y<x+1$；例如 $x=1$ 时 $y\approx 1.696$。

常见错误

- 在最后一部分忘记了零和负整数，而所有的解偏偏都在那里。
- 想当然地认定两个整数中哪一个排在“前面”。这里立方差是正数，所以较大的数必须排在前面；这一点要写明。
- 证明第二个结果时只是“展开”了事，没有指出 t^3-t^2 在 $t\geq 1$ 时递增；$f(y)\geq f(x+1)$ 这一步正需要这个性质。

STEP 之外

“实数解被严格夹在两个相邻整数之间，所以没有整数解”这个论证，是研究丢番图方程（Diophantine equation）的标准工具，面对整数多项式方程时，往往也是第一样值得一试的方法。许多这类方程只有有限多个解，也是靠这样给解定出界限来证明的，然后就可以用有限的搜索把解全部找出来。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门书）是这类数论的绝佳入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。