详细解答

STEP III 2002，第 3 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP III 2002，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q3

关键思路

一切都取决于图像的形状：图像由 $x = b$ 出发，起点处有一条铅垂切线（vertical tangent），曲线向下走，降至唯一的极小值（minimum），然后无止境地上升。只要知道起点的高度和极小值的高度，要数出 $\mathrm{f}(x) = c$ 有多少个解，只需在高度 c 处画一条水平线，看看它与曲线相交多少次。其后两条数值方程都是特殊情况，它们的 c^2 值分别落在这些范围的边界上和内部。

解答

图像

在左端，$\mathrm{f}(b) = a\sqrt{b}$。对 $x > b$ 求导，得

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-b}}.$$

当 $x \to b^+$ 时，第二项趋向 $-\infty$，所以曲线离开点 $(b, a\sqrt{b})$ 时是笔直向下的（铅垂切线）。由于两个平方根均为正数，

$$\mathrm{f}'(x) < 0 \iff a\sqrt{x-b} < \sqrt{x} \iff a^2(x-b) < x \iff x < \frac{a^2 b}{a^2-1},$$

其中最后一步用到 $a^2 - 1 > 0$。因此 f 在 $[b, x_0]$ 上严格递减（strictly decreasing），在 $[x_0, \infty)$ 上严格递增（strictly increasing），其中

$$x_0 = \frac{a^2 b}{a^2 - 1}.$$

在极小点处，$x_0 - b = \dfrac{b}{a^2-1}$，所以

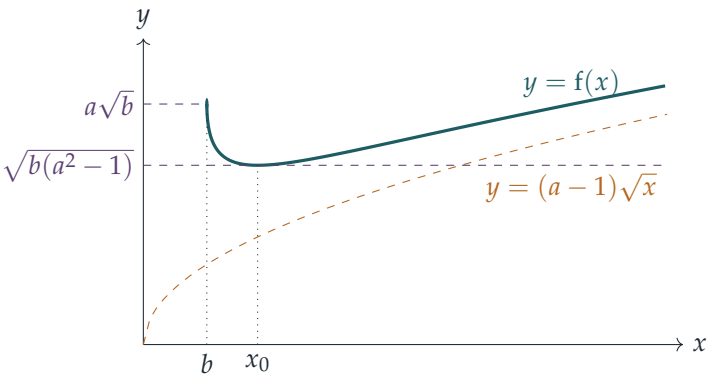
$$\mathrm{f}(x_0) = a \cdot \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{b(a^2-1)}.$$

当 x 很大时，有理化（rationalising）后得

$$\mathrm{f}(x) = (a-1)\sqrt{x} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-b}) = (a-1)\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}+\sqrt{x-b}},$$

所以，因为 $a > 1$，$\mathrm{f}(x) \to \infty$，而且曲线位于 $y = (a-1)\sqrt{x}$ 稍上方，并随 $x \to \infty$ 向它靠近。

最后，起点的高度高于极小值：$a^2 b > (a^2-1)b$，所以 $a\sqrt{b} > \sqrt{b(a^2-1)}$。



数算解的个数

记极小值为 $m = \sqrt{b(a^2-1)}$，起点的值为 $M = a\sqrt{b}$，于是 $0 < m < M$。在两段单调（monotonic）的部分上，f 各自连续（continuous）且严格单调，所以它对值域内的每个值都恰好取一次：

- 在 $[b, x_0]$ 上，f 对 $[m, M]$ 内的每个值恰好取一次；
- 在 $[x_0, \infty)$ 上，f 对 $[m, \infty)$ 内的每个值恰好取一次。

这两段只有 x_0 一个公共点，该处的函数值为 m。

由于对所有 $x \geq b$ 均有 $\mathrm{f}(x) \geq m$，当 $c < m$ 时方程 $\mathrm{f}(x) = c$ 无解。对 $c > 0$ 而言，这等同于 $c^2 < m^2$，即

$$c^2 < b(a^2-1) \quad \Longrightarrow \quad \text{无解},$$

这正是要证明的结果。至于其余情况：

想一想 为甚么 $c^2 = a^2b$ 时有两个解，而不是一个?

当 $c = M$ 时，左边一段提供的解正是端点 $x = b$ 本身；由于定义域（domain）包含 $x = b$，它是一个名正言顺的解。右边一段则在更远处再提供一个解。只有当 $c > M$ 时，左边一段才不再提供解。因此，对 $c > 0$：

- 当 $c^2 = b(a^2 - 1)$（只有 $x = x_0$，即直线刚好碰到极小点），或当 $c^2 > a^2b$（只有上升的一支能到达这个高度）时，**恰有一个解**；
- 当 $b(a^2 - 1) < c^2 \le a^2b$（两支各有一个）时，**恰有两个解**。

第 (i) 部分

这里 $a = 3$，$b = 2$，$c = 4$，所以 $b(a^2 - 1) = 16 = c^2$：直线刚好碰到极小点，方程恰有一个解，

$$x = x_0 = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}.$$

确实有 $3 \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$。直接计算亦可：把方程改写成 $3\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x - 2}$ 再两边平方，得 $8x - 24\sqrt{x} + 18 = 0$，即 $(2\sqrt{x} - 3)^2 = 0$。重根（repeated root）正是相切在代数上的标记。

第 (ii) 部分

这里 $a = 3$，$b = 3$，$c = 5$，所以 $b(a^2 - 1) = 24 < 25 = c^2 < 27 = a^2b$，方程恰有两个解。要求出这两个解，把方程写成 $3\sqrt{x} - 5 = \sqrt{x - 3}$ 再两边平方：

$$9x - 30\sqrt{x} + 25 = x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 15\sqrt{x} + 14 = 0.$$

把它看成 $\sqrt{x}$ 的二次方程，有 $(\sqrt{x} - 2)(4\sqrt{x} - 7) = 0$，所以 $\sqrt{x} = 2$ 或 $\sqrt{x} = \frac{7}{4}$，由此得

$$x = 4 \qquad 或 \qquad x = \frac{49}{16}.$$

平方可能会引入增根（spurious roots），所以我们把两个值都代入原方程验算。两者都满足 $x \ge 3$（因为 $\frac{49}{16} = 3.0625$），而且

$$3 \cdot 2 - \sqrt{1} = 5, \qquad 3 \cdot \frac{7}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = 5.$$

所以两个都是真正的解，与之前数出的两个解吻合。一如所料，它们分别位于 $x_0 = \frac{27}{8} = 3.375$ 的两侧。

验算

- 取 $a = \frac{3}{2}$，$b = 2$（即草图所用的数值），则 $x_0 = \frac{18}{5}$，而 $\mathrm{f}(\frac{18}{5}) = \frac{3}{2}\sqrt{3.6} - \sqrt{1.6} = \sqrt{2.5} \approx 1.581$，低于 $\mathrm{f}(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2.121$。
- 随机选取 200 组 (a, b)，在细密的格点上对 f 作数值扫描，结果证实极小值 $\sqrt{b(a^2-1)}$ 出现在 x_0 处；而数算曲线与 $y = c$ 的交点，在 c^2 的三个范围内分别得到 0、2 和 1 个解。
- 在 (i) 中，二重根与 c^2 恰好等于 $b(a^2-1)$ 这一点吻合；在 (ii) 中，$c^2 = 25$ 严格介乎 24 与 27 之间，而我们确实找到了两个根。

常见错误

- 把 $c^2 = a^2 b$ 归入“一个解”的情况：$x = b$ 在定义域内，所以要计算在内。
- 平方之后没有验算。这里两个根都保留下来，但你必须逐一检验 $3\sqrt{x} - 5 \geq 0$ 和 $x \geq 3$。
- 忘记了正是 $a > 1$ 才令 $\mathrm{f} \to \infty$；假如 $a \leq 1$，便不会有极小值，整个图像会完全不同。

STEP 之外

这个数算解的个数的论证，建基于分析学（analysis）的两个事实：区间上的连续函数会取遍两端函数值之间的每一个值（介值定理，intermediate value theorem）；而严格单调函数对每个值最多取一次。两者合起来，便把一幅草图变成一个证明。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对这两点都有细致的阐述，并说明为何连续性恰恰就是所需的假设。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。