详细解答

# STEP III 2002，第 2 题

纯数学 · 反正切级数

**STEP III 2002，第 2 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q2

## 关键思路

第一个结果其实是乔装了的正切加法公式（tangent addition formula）。真正要下工夫的，只是验证等式两边的角都落在同一个区间内，而 tan 在该区间上是一对一（one-to-one）的。有了这条公式，归纳法（induction）那一步只需套用它一次，再做一些因式分解（factorising）。至于最后一个和，窍门在于留意到 $r^2 - r + 1$ 不过是把 $r^2 + r + 1$ 中的 $r$ 平移一位。因此新的级数（series）就是原来的级数，在前面多加一项而已。

## 解答

### 加法公式

设 $A = \arctan a$ 及 $B = \arctan b$。则 $\tan A = a$ 及 $\tan B = b$，并且

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a + b}{1 - ab},$$

由于 $ab < 1$，此式有意义。这说明 $A + B$ 与 $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ 的正切值相同。但单凭这一点并不足以令两者相等，因为 tan 每隔 $\pi$ 便重复一次。所以我们需要两个角都落在同一个区间内，而 tan 在该区间上是一对一的。

? **想一想** 为甚么得到 $\tan(A + B) = \frac{a+b}{1-ab}$ 之后，证明还未完结?

证明还未完结，是因为 arctan 只会取 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的值。我们必须验证 $A + B$ 也落在这个区间内。

- 由于 $0 < a < 1$，而 arctan 是递增函数，故 $0 < A < \frac{\pi}{4}$。同理 $0 < B < \frac{\pi}{4}$，所以 $0 < A + B < \frac{\pi}{2}$。

► 由于 $a+b>0$ 及 $1-ab>0$，分数 $\frac{a+b}{1-ab}$ 为正数。所以它的 arctan 也落在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内。

函数 tan 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上严格递增（strictly increasing），因而是一对一的。所以该区间内正切值相同的两个角必定相等，由此得

$$\arctan a+\arctan b=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right). \qquad \checkmark$$

**归纳法**

记 $S_n=\sum_{r=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)$。要证明的是 $S_n=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$。

基础情况（*base case*）。当 $n=1$ 时，两边均为 $\arctan\frac{1}{3}$。

归纳步骤（*inductive step*）。假设对某个 $n\geq 1$，有 $S_n=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$。下一项中有

$$(n+1)^2+(n+1)+1=n^2+3n+3,$$

所以

$$S_{n+1}=\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

两个自变量都严格介乎 0 与 1 之间，所以加法公式适用，其中 $a=\frac{n}{n+2}$ 及 $b=\frac{1}{n^2+3n+3}$。把 $\frac{a+b}{1-ab}$ 的分子和分母同乘以 $(n+2)(n^2+3n+3)$，得

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1-ab}&=\frac{n(n^2+3n+3)+(n+2)}{(n+2)(n^2+3n+3)-n}\\&=\frac{n^3+3n^2+4n+2}{n^3+5n^2+8n+6}.\end{aligned}$$

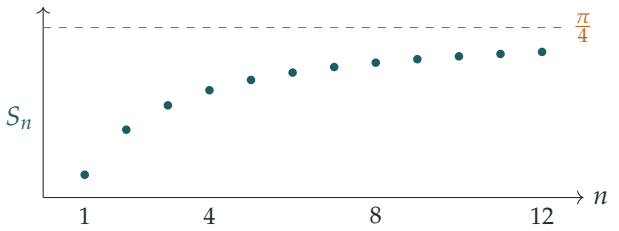
两个三次式都在某个负整数处取值为零：分子在 $n=-1$，分母在 $n=-3$。因式分解后，

$$\frac{a+b}{1-ab}=\frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{(n+3)(n^2+2n+2)}=\frac{n+1}{n+3},$$

这里可以约去公因式，是因为 $n^2+2n+2=(n+1)^2+1>0$。因此 $S_{n+1}=\arctan\left(\frac{n+1}{(n+1)+2}\right)$，这正是 $n+1$ 时的命题。根据归纳法，结果对所有 $n\geq 1$ 成立。✓

无穷和。当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{n+2}\to 1$。由于 arctan 是连续（continuous）的，

$$\sum_{r=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$



### 最后的和

设 $s = r - 1$。则

$$r^2 - r + 1 = (s+1)^2 - (s+1) + 1 = s^2 + s + 1.$$

当 $r$ 取遍 $1, 2, 3, \ldots$ 时，$s$ 取遍 $0, 1, 2, \ldots$。$s = 0$ 的一项是 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，而其余各项（$s \geq 1$）恰好组成我们刚刚求和的级数。因此

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2 - r + 1}\right) = \arctan 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{s^2 + s + 1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \qquad \checkmark$$

第二个级数收敛（converge），是因为第一个级数收敛，所以把首项分拆出来是合理的。

## 验算

- 当 $n = 2$ 时：$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$ 的正切值为 $\frac{10/21}{20/21} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$，与公式所预测的一致。
- 数值上，$S_{2000} \approx 0.784898$，而 $\arctan\frac{2000}{2002}$ 与之相差不超过 $10^{-12}$，另外 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$。
- 把第二个级数求和至 $r = 10^6$，得 $1.5707953\ldots$，与 $\frac{\pi}{2}$ 相差不超过 $10^{-6}$。这与取 $n$ 项后的差距 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{n-1}{n+1} = \arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$ 吻合。

## 常见错误

- 写到“两边的 tan 相等”便停笔。缺少关于取值范围的论证，证明并不完整。（例如当 $a = b = 2$ 时公式不成立：左边是正数，但 $\arctan(-\frac{4}{3})$ 是负数。）
- 在归纳步骤中使用公式之前，忘记验证两个自变量都落在 $(0, 1)$ 内。
- 把最后的和又写成 $\frac{\pi}{4}$。平移 $r \mapsto r - 1$ 会在前面多加一项 $\arctan 1$。

## STEP 之外

归纳法那部分还有一条更巧妙的路径。由于 $\frac{1}{r^2+r+1} = \frac{(r+1)-r}{1+r(r+1)}$，每一项都等于 $\arctan(r+1) - \arctan r$。于是这个和可以裂项相消（telescope），得 $\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$，再由减法公式可知它等于 $\arctan\frac{n}{n+2}$。看出裂项相消的结构，以及利用连续性来论证部分和（partial sum）的极限，都是大学第一门分析（analysis）课程中的日常工具。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）细致地讨论了级数与连续性，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）则有更多这类 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。