详细解答

STEP III 2002，第 13 题

概率与统计 · 指数分布变量的最小值

> **STEP III 2002，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q13

关键思路

“至少有一个小于 x”是“两个都不小于 x”的补事件（complement），而后者的概率可凭独立性（independence）分解成乘积。指数分布（exponential distribution）的尾概率非常简单，$\mathrm{P}(X_i \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}$，所以乘积仍然是一个指数尾概率，而关于最小值的证明就仅此而已。巴士一问则是直接应用：等候下一班巴士的时间，就是两个指数间隔之中较小的一个。

解答

其中一个或两个都小于 x 的概率

先求单一指数变量的尾概率。对于 $x \geq 0$，

$$\mathrm{P}(X_i \geq x) = \int_x^\infty \lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\right]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}.$$

设 E 为 $X_1 < x$ 或 $X_2 < x$（或两者皆是）这个事件。它的补事件是 $X_1 \geq x$ 与 $X_2 \geq x$ 同时成立。由于 X_1 与 X_2 独立，

$$\mathrm{P}(X_1 \geq x \text{ 且 } X_2 \geq x) = \mathrm{P}(X_1 \geq x)\,\mathrm{P}(X_2 \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x},$$

所以，对于 $x \geq 0$，

$$\boxed{\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.}$$

（对于 $x < 0$，这个概率是 0，因为两个变量都不可能取负值。）

> **想一想** 为甚么不直接把 $\mathrm{P}(X_1 < x)$ 与 $\mathrm{P}(X_2 < x)$ 相加?

因为这两个事件有重叠：两个变量可以同时小于 x，相加便会把这种情况计算两次。你也可以用容斥原理（inclusion–exclusion）来做，$(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})+(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})-(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})$，化简后得到相同的答案，但用补事件会快捷得多。

最小值服从指数分布

设 $X=\min(X_1,X_2)$。两个数中较小的一个小于 x，当且仅当其中至少有一个小于 x，所以 $\{X<x\}$ 就是上面的事件 E。因此 X 的分布函数（distribution function）是

$$F(x)=\mathrm{P}(X\le x)=1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\qquad (x\ge 0),$$

而当 $x<0$ 时 $F(x)=0$。（对于连续变量，$\mathrm{P}(X<x)=\mathrm{P}(X\le x)$。）求导后，$X$ 的密度函数（density）是

$$f(x)=F'(x)=(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\qquad (0\le x<\infty),$$

这正是参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的指数密度函数。所以 X 服从指数分布，这正是所要证明的。

巴士

参数为 λ 的指数分布，其平均值为 $\int_0^\infty t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1/\lambda$（用分部积分法）。以分钟为时间单位，平均间隔 15 分钟和 30 分钟所对应的参数是

$$\lambda_A=\tfrac{1}{15},\qquad \lambda_B=\tfrac{1}{30}.$$

两条路线各有一班巴士刚刚开出，所以距离下一班 A 线巴士的时间，就是 A 线巴士之间一个完整的间隔 T_A，B 线同理为 T_B。两者互相独立，分别服从参数为 λ_A 和 λ_B 的指数分布。两条路线都可以送我到学院，所以我的等候时间是 $W=\min(T_A,T_B)$，而根据刚才证明的结果，W 服从指数分布，参数为

$$\lambda_A+\lambda_B=\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{30}=\tfrac{1}{10}.$$

中位数（median）m 满足 $\mathrm{P}(W\le m)=\frac{1}{2}$：

$$1-\mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2}\iff \mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2}\iff m=10\ln 2.$$

由于 $\ln 2\approx 0.693$，等候时间的中位数是 $m\approx 6.93$ 分钟，即大约 7 分钟，与题目要求相符。

验算

- 若 $\lambda_2\to 0$（B 线巴士几乎永远不来），答案变成 $1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}$，正好是 X_1 的分布，合乎预期。

- 平均等候时间是 10 分钟，比两条路线各自的平均值 15 或 30 分钟都要短；而中位数 $10\ln 2$ 低于平均值，这是右偏分布（right-skewed distribution）的常见现象。
- 模拟 2×10^5 对平均值分别为 15 和 30 的独立指数间隔，所得最小值的中位数约为 6.91 分钟，而 $10\ln 2 = 6.931\ldots$。

常见错误

- 把平均值当作参数：平均值为 15 的指数分布，其 $\lambda = \frac{1}{15}$，而不是 15。
- 把两个概率相加，即 $\mathrm{P}(X_1 < x) + \mathrm{P}(X_2 < x)$，这样会重复计算，而且结果可能超过 1。
- 取两条路线中位数的平均，或只取 A 线的中位数（$15\ln 2 \approx 10.4$）：有两条路线可选，等候时间会缩短。

STEP 之外

巴士之间的间隔服从指数分布，意味着巴士的到达构成一个泊松过程（Poisson process），而这里的结果说明：把两个独立的泊松过程合并，会得到另一个泊松过程，其速率是两个速率之和。这个结果连同无记忆性（memoryless property）$\mathrm{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathrm{P}(X > t)$，是排队论（queueing theory）和连续时间马可夫链（continuous-time Markov chains）的基础，在大学一年级的概率课程中便会学到。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教材）涵盖了指数变量和泊松过程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。