详细解答

STEP III 2002，第 11 题

力学 • 与墙壁的斜碰撞

STEP III 2002，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q11

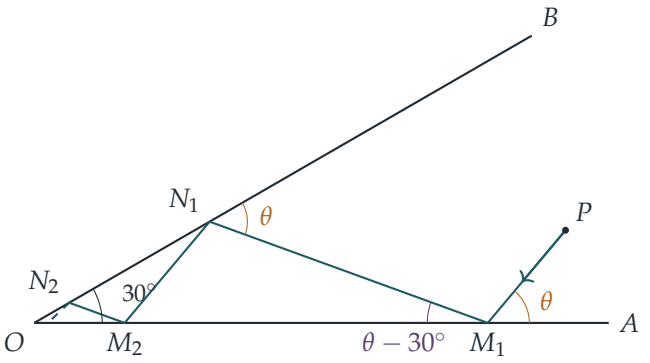
本题在 *Beyond STEP* 第 10.5 节有限时间内的无限次反弹中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/zeno-wedge.html

关键思路

在光滑（smooth）的墙上，冲量（impulse）垂直于墙。因此沿墙方向的速度分量保持不变，只有垂直方向的分量乘以 e。把这一点与三角形 OM_1N_1 的各个角结合起来，第一部分便化为一条三角方程。至于第二部分，每次反弹之后，运动都会以较小的规模重演一次。各段路程愈来愈短，但质点（particle）同时也在减慢，所以我们要相加的是时间，而不是距离。这个和是一个等比级数（geometric series）。

解答

我们把质点视为在光滑水平面上运动的一点，因此在两次碰撞之间，它以恒定速率沿直线运动。两面墙都是光滑的，而每次碰撞都遵从牛顿实验定律（Newton's experimental law），其系数为 e。



求 e 及 v_1/u_1

由于角 $PM_1A = \theta$，质点到达 M_1 时正朝着 O 运动，与墙成角 θ。碰撞前的一刻，它的速度分量为

$$u_1\cos\theta \text{ 沿墙方向（朝向 } O\text{）}, \qquad u_1\sin\theta \text{ 垂直于墙（指向墙内）}.$$

墙是光滑的，所以质点所受的冲量垂直于 OA。因此：

$$\begin{aligned} &\text{沿墙方向：} u_1\cos\theta \text{（不变）}, \\ &\text{垂直方向：} e\,u_1\sin\theta \text{（方向逆转，并乘以 } e\text{）}. \end{aligned}$$

所以质点离开 M_1 时仍然朝着 O 运动，与墙成角 φ，其中

$$\tan\varphi = \frac{e\,u_1\sin\theta}{u_1\cos\theta} = e\tan\theta, \qquad v_1\cos\varphi = u_1\cos\theta. \tag{$*$}$$

接着我们利用三角形 OM_1N_1 的几何关系求 φ。O、N_1、B 三点共线，而角 $M_1N_1B = \theta$，所以角 $ON_1M_1 = 180^\circ - \theta$。位于 O 的角是 30°，故

$$\varphi = \angle OM_1N_1 = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - \theta) = \theta - 30^\circ.$$

要 φ 为正，必须有 $\theta > 30^\circ$，这是本题的布局所隐含的假设。于是由 $(*)$ 得

$$\boxed{e = \frac{\tan(\theta - 30^\circ)}{\tan\theta}}$$

以及

$$\boxed{\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{3} + \tan\theta}},$$

其中最后一个形式来自展开 $\cos(\theta - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$。你也可以写成 $e = \dfrac{\sqrt{3}\tan\theta - 1}{\tan\theta\,(\sqrt{3} + \tan\theta)}$。由于 $0 < \theta - 30^\circ < \theta < 90^\circ$，我们得到 $0 < e < 1$，符合题目的要求。

在有限时间内到达 O

质点到达 N_1 时正朝着 O 运动，与墙 OB 成角 θ（因为角 $M_1N_1B=\theta$）。这与在 M_1 的情况完全相同，只是两面墙的角色互换了。所以同样的计算仍然适用：它反弹后与 N_1O 成角 $\theta-30^\circ$，而速率则乘以

$$r=\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}.$$

想一想 质点到达 M_2 时是否又再成角 θ，使这个规律真的重复下去?

是的。在三角形 ON_1M_2 中，位于 O 的角是 30°，位于 N_1 的角是 $\theta-30^\circ$。所以角 $OM_2N_1=180^\circ-\theta$，即角 $N_1M_2A=\theta$。由归纳法（induction）可知，每次碰撞都是与墙成角 θ 发生的。每一段路程都以角 $\theta-30^\circ$ 离开墙。而每个三角形 OM_nN_n、ON_nM_{n+1} 的三个角都是 30°、$\theta-30^\circ$、$180^\circ-\theta$，所以它们全部相似（similar）。

长度。在三角形 OM_1N_1 中应用正弦定理（sine rule），

$$\frac{ON_1}{\sin(\theta-30^\circ)}=\frac{OM_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{M_1N_1}{\sin 30^\circ}.$$

所以每个新三角形都是前一个三角形按以下比例缩放而成：

$$k=\frac{ON_1}{OM_1}=\frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta}.$$

把各段路程 M_1N_1，N_1M_2，$M_2N_2,\ldots$ 称为第 $1,2,3,\ldots$ 段。第 n 段的长度为 ℓ_1k^{n-1}，其中 $\ell_1=M_1N_1=\dfrac{OM_1}{2\sin\theta}$。

速率。质点以恒定速率 v_1r^{n-1} 走过第 n 段。

时间。因此第 n 段所需的时间为

$$\tau_n=\frac{\ell_1k^{n-1}}{v_1r^{n-1}}=\frac{\ell_1}{v_1}q^{n-1},\qquad q=\frac{k}{r}=\frac{\sin(\theta-30^\circ)\cos(\theta-30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}.$$

想一想 各段路程按等比缩短，但质点同时也在减慢。为甚么单凭这一点还不足以下结论?

我们要相加的是时间，而时间之比 q 所比较的，正是路程的缩短（k）与质点的减慢（r）。我们需要 $q<1$。现在假设 $30^\circ<\theta<60^\circ$。那么

$$0^\circ<2\theta-60^\circ<60^\circ\ \Rightarrow\ \sin(2\theta-60^\circ)<\tfrac{\sqrt3}{2},\qquad 60^\circ<2\theta<120^\circ\ \Rightarrow\ \sin 2\theta>\tfrac{\sqrt3}{2},$$

所以 $0<q<1$。于是总时间是一个收敛（convergent）的等比级数：

$$T=\frac{PM_1}{u_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell_1}{v_1}q^{n-1}=\frac{PM_1}{u_1}+\frac{\ell_1}{v_1(1-q)}.$$

这是有限的。要化简，可利用 $\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ$，由此得 $1 - q = \dfrac{\cos(2\theta - 30^\circ)}{\sin 2\theta}$。于是由 M_1 起计的时间为

$$\frac{\ell_1}{v_1(1-q)} = \frac{OM_1\cos(\theta - 30^\circ)}{u_1\cos(2\theta - 30^\circ)},$$

当 $30^\circ < \theta < 60^\circ$ 时，它是正数而且有限。

最后，质点确实会到达 O。第 n 次碰撞之后，它与 O 的距离是 $OM_1k^n \to 0$，因为 $0 < k < 1$。在走每一段路程期间，它与 O 的距离不会超过该段两个端点的距离中较大的一个。所以当 $t \to T$ 时，质点与 O 的距离趋向 0：它经过无限多次碰撞之后，在有限时间 T 到达 O。■

验算

- 当 $\theta = 45^\circ$：$e = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$，$v_1/u_1 = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$，而 $q = \sin 30^\circ / \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$，所以每一段所需的时间都是前一段的一半。取 $OM_1 = u_1 = 1$，由 M_1 到 O 的时间是 $\cos 15^\circ / \cos 60^\circ = 2\cos 15^\circ \approx 1.932$。逐次模拟各次碰撞（六十次反弹）得到 1.931852，两者吻合。
- 当 $\theta = 60^\circ$：$q = 1$，所以每一段所需的时间都相同，总时间是无限的。当 $\theta > 60^\circ$ 时，$q > 1$。所以 60° 正好是分界线，而 T 的公式在该处因 $\cos(2\theta - 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$ 而趋向无限大。
- 当 $\theta \to 30^{\circ+}$ 时，$e \to 0$：质点几乎不反弹，差不多笔直地滑向 O，正如你所预期的。

常见错误

- 把三角形弄错：角 M_1N_1B 是位于 N_1 的外角（exterior angle），所以内角是 $180^\circ - \theta$，而在 M_1 的反弹角是 $\theta - 30^\circ$，不是 $\theta + 30^\circ$。
- 只因为距离 $OM_n \to 0$ 便断言质点到达 O。无限多段路程需要一个收敛的时间级数，而质点在每次碰撞时都会减慢。
- 在碰撞时把切向分量（tangential component）逆转。在光滑的墙上，只有法向分量（normal component）会改变。

STEP 之外

在有限时间内发生无限多次碰撞，称为芝诺现象（Zeno behaviour）。大家熟悉的例子是一个以 $e < 1$ 在地板上弹跳的球，而这里的楔形就扮演了地板的角色。研究“混合”系统

（hybrid systems，即把平滑运动与突然跳变混合起来的系统）的数学家，必须决定在芝诺时间之后会发生甚么事。在颗粒物料中，同样的效应称为非弹性坍缩（inelastic collapse），会在模拟中造成实际的麻烦。若想看以大学一年级程度仔细处理碰撞与冲量的论述，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。