详细解答

# STEP III 2002，第 10 题

力学 • 涉及摩擦力的转动

**STEP III 2002，第 10 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q10

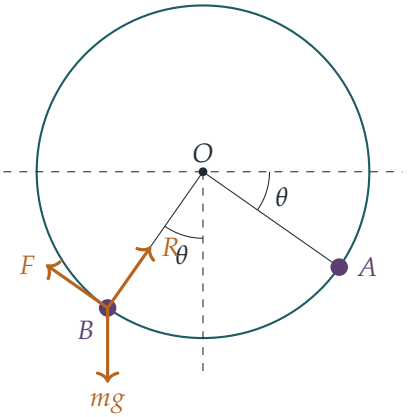
## 关键思路

只要第二个质点（particle）不滑动，它便随圆柱一起运动，于是整个系统是一个绕固定轴转动的刚体（rigid body）：两个相等的质量位于半径 $a$ 处，彼此相隔四分之一圈。这样，用能量（或对转轴取力矩（moments））一行便可得出运动方程。要找出何时开始滑动，我们单独考虑那个没有固定的质点，沿表面方向和垂直于表面方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），求出它所需的摩擦力（friction）$F$ 和法向反作用力（normal reaction）$R$。当 $F$ 首次达到 $\mu R$ 时，它便开始滑动。

## 解答

### 建立模型

把两个质点都视为轻圆柱上的点质量，轮轴光滑。设 $O$ 为转轴，$A$ 为固定的质点，$B$ 为没有固定的质点。系统由静止释放后，$A$ 下落，圆柱因而转动（在图中为顺时针方向），并把 $B$ 带上远离 $A$ 的一侧。转过角度 $\theta$ 后，$OA$ 在水平线以下成角 $\theta$，而 $OB$ 在另一侧与向下的铅垂线成角 $\theta$。




### 运动方程

只要 $B$ 不滑动，两个质点都在半径为 $a$ 的圆上以角速率（angular speed）$\dot\theta$ 运动，而圆柱本身没有质量。取 $O$ 所在的水平面为势能（potential energy）零点，则 $A$ 的高度为 $-a\sin\theta$，$B$ 的高度为 $-a\cos\theta$。系统在 $\theta = 0$ 时由静止开始运动，光滑轮轴不作功，而 $B$ 与圆柱之间没有相对运动，所以摩擦力所作的净功为零。因此能量守恒：

$$2\cdot\tfrac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 - mga\sin\theta - mga\cos\theta = -mga,$$

即

$$\dot\theta^2 = \frac{g}{a}(\sin\theta + \cos\theta - 1). \qquad (*)$$

对时间求导，再除以 $2\dot\theta$（运动一旦开始，它便不等于零），得

$$\ddot\theta = \frac{g}{2a}(\cos\theta - \sin\theta),$$

这正是所要求的结果。另一个等价的做法是对 $O$ 取力矩：$A$ 的重量沿转动方向的力矩为 $mga\cos\theta$，$B$ 的重量逆转动方向的力矩为 $mga\sin\theta$，而转动惯量（moment of inertia）为 $2ma^2$。

### $B$ 何时滑动？

现在单独考虑 $B$。作用于它的力有：重量 $mg$、指向 $O$ 的法向反作用力 $R$，以及沿表面的摩擦力 $F$；我们取摩擦力沿 $B$ 的运动方向（即沿侧面向上）为正。$B$ 在半径为 $a$ 的圆上运动，所以它有指向 $O$ 的加速度 $a\dot\theta^2$ 和沿运动方向的加速度 $a\ddot\theta$。重量有一个大小为 $mg\cos\theta$、方向正背离 $O$ 的分量，以及一个大小为 $mg\sin\theta$、与运动方向相反的分量。因此

$$\text{指向}O:\quad R - mg\cos\theta = ma\dot\theta^2,$$
$$\text{沿运动方向:}\quad F - mg\sin\theta = ma\ddot\theta.$$

利用 $(*)$ 和运动方程，

$$R = mg\cos\theta + mg(\sin\theta + \cos\theta - 1) = mg\,(2\cos\theta + \sin\theta - 1),$$
$$F = mg\sin\theta + \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg\,(\sin\theta + \cos\theta).$$

当 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 时，两者皆为正。（$R > 0$ 是因为当 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$ 时，利用 $2\cos\theta \ge 1$ 可得 $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \ge \sin\theta > 0$，而在 $\theta = 0$ 时 $R = mg$。）所以 $B$ 保持接触，而摩擦力把它沿侧面向上推。只要 $F \le \mu R$，质点便不会滑动，也就是说，只要

$$\rho(\theta) = \frac{F}{R} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2(2\cos\theta + \sin\theta - 1)} \le \mu.$$

在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时，$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 而 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，于是

$$\rho\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \mu.$$

**想一想** 为甚么质点不可能在此之前已经开始滑动？

我们需要对所有 $0 \le \theta < \frac{\pi}{3}$ 都有 $\rho(\theta) < \mu$。记 $N = \sin\theta + \cos\theta$ 和 $D = 2\cos\theta + \sin\theta - 1$。则

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (\cos\theta - \sin\theta)(2\cos\theta + \sin\theta - 1) - (\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - 2\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta - \cos\theta = 1 + \sin\theta - \cos\theta, \end{aligned}$$

它在 $0 < \theta < \pi$ 时为正。由于在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上 $D > 0$，故在该区间上 $\rho' = (N'D - ND')/(2D^2) > 0$，所以 $\rho$ 由 $\rho(0) = \frac{1}{2}$ 起严格递增。因此它一直小于 $\mu$，直至在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时恰好达到 $\mu$。此外，由 $(*)$ 可知，当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时 $\dot\theta^2 > 0$，所以圆柱确实会一直转动并到达这个角度。

所以，当圆柱转过 $60^\circ$ 时，第二个质点开始滑动，这正是所要求的结果。

## 验算

- 在 $\theta = 0$ 时：$B$ 静止于最低点，但 $F = \frac{1}{2}mg \ne 0$。这是对的：$A$ 的重量正试图转动圆柱，而摩擦力必须令 $B$ 随之加速。事实上，此时 $F = ma\ddot\theta = \frac{1}{2}mg$，而 $R = mg$，因为 $B$ 还未有速率。
- 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，$\ddot\theta = 0$，角速率达到最大值；两个重量对 $O$ 的力矩互相平衡时，正应如此。
- 以数值方法验证：对运动方程作数值积分，并直接由 $B$ 的加速度计算作用于它的接触力，所得结果与 $R$ 和 $F$ 的公式吻合，而 $F/R$ 首次达到 $(3+\sqrt{3})/6 \approx 0.7887$ 是在 $60.00^\circ$。

## 常见错误

- 把圆柱的转动惯量也计算在内：圆柱是轻的，所以只有两个质点贡献 $2ma^2$。
- 忘记了 $B$ 的切向加速度（tangential acceleration）$a\ddot{\theta}$，这会得出 $F = mg\sin\theta$ 和错误的角度。
- 只验证在 $60°$ 时 $F = \mu R$，却没有证明在此之前 $F/R$ 较小。

## STEP 之外

这是一个单自由度（one-degree-of-freedom）系统：一旦加上约束（constraint）条件（不滑动），单一个坐标 $\theta$ 便足以描述一切，而能量可直接给出运动。约束力是事后才求出的，而当约束所需的力超过表面所能提供的力时，约束便会失效。这与质点离开球面的问题是同一套逻辑，而在拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中，这套方法藉拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）而变得有系统。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种精神阐述刚体转动和约束力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。