详细解答

STEP III 2002，第 1 题

纯数学 · 广义积分与体积

STEP III 2002，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

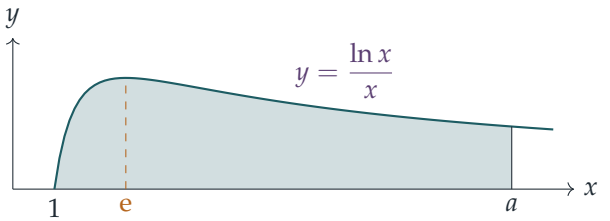
step.maths.org/questions/02-s3-q1

关键思路

只要留意到 $\frac{1}{x}$ 是 $\ln x$ 的导数（derivative），两个积分都变得容易。面积的被积函数（integrand）是“一个函数乘以它自己的导数”，所以一眼就能积出来。体积的被积函数 $(\ln x)^2/x^2$ 多出了一个 x 的幂，因此我们要用两次分部积分法（integration by parts），每次都对对数的幂求导，把它的次数降低；这里所说的对数就是 $\ln x$。有趣之处在于两个极限（limit）的对比：曲线衰减得刚好够慢，令面积无止境地增长；但把它平方之后，衰减就够快，令体积稳定下来。

解答

当 $x \geq 1$ 时，$\ln x \geq 0$，所以曲线位于 x 轴上或其上方，面积就是该积分本身。曲线由 $(1,0)$ 出发，上升至 $x = \mathrm{e}$ 处的极大值（该处 $y' = (1-\ln x)/x^2 = 0$），然后缓缓地向横轴衰减。



面积

由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right) = \dfrac{\ln x}{x}$，

$$A(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^a = \tfrac{1}{2}(\ln a)^2,$$

因为 $\ln 1 = 0$。（等价的做法是用代换法（substitution）：设 $u = \ln x$，$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$，便得到 $\int_0^{\ln a} u\,\mathrm{d}u$。）

当 $a \to \infty$ 时，$\ln a \to \infty$，所以 $A(a) \to \infty$：面积是无界的，尽管它增长得非常缓慢。

体积

绕 x 轴旋转，所得的体积为 $V(a) = \pi\displaystyle\int_1^a y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^a \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$。

用分部积分法，取 $u = (\ln x)^2$ 及 $\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$，于是 $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ 及 $v = -\frac{1}{x}$：

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

再做一次同样的步骤，取 $u = \ln x$，$\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$：

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

把两者合并，

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

在 $x = 1$ 处，括号内的值是 $0 + 0 + 2$，所以下限的贡献是 $-(-2) = +2$，于是

$$V(a) = \pi\left(2 - \frac{(\ln a)^2 + 2\ln a + 2}{a}\right).$$

想一想 $(\ln a)^2/a$ 的分子和分母都趋向无穷大，我们怎样知道它趋向 0?

对数的增长比任何正数次幂都要慢。要把这句话说得严谨，可由以下事实出发：对所有 $t > 0$ 都有 $\ln t < t$（直线 $y = t$ 位于 $y = \ln t$ 的上方；两者的差距 $t - \ln t$ 在 $t = 1$ 处取得最小值 1）。代入 $t = a^{1/4}$：则 $\frac{1}{4}\ln a < a^{1/4}$，即 $\ln a < 4a^{1/4}$。所以当 $a > 1$ 时，

$$0 < \frac{(\ln a)^2}{a} < \frac{16\,a^{1/2}}{a} = \frac{16}{\sqrt{a}} \to 0, \qquad 0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{4}{a^{3/4}} \to 0,$$

而 $2/a \to 0$ 自然不在话下。因此 $V(a)$ 中的分式趋向 0，而

$$V(a) \to 2\pi \quad \text{当} a \to \infty.$$

由于被积函数为正，$V(a)$ 随 a 递增，所以体积稳步上升并趋近 2π，但永远不会达到这个值：即使被旋转的区域面积无限，所得的立体却只有有限的体积。

验算

- 在 $a = 1$ 时，两条公式都给出 0，这是必然的：$A(1) = 0$ 及 $V(1) = \pi(2 - 2) = 0$。
- 对 $-\big((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\big)/x$ 求导，可还原出 $(\ln x)^2/x^2$（$2\ln x$ 和 2 这两项与括号的导数互相抵消）。
- 数值上，对 $\pi \int_1^{10} (\ln x)^2/x^2 \,\mathrm{d}x$ 使用辛普森法则（Simpson's rule）得出 2.54247，与公式吻合；而设 $x = \mathrm{e}^t$ 后，无限延伸时的体积是 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$，其数值计算结果为 $6.283185\ldots = 2\pi$。

常见错误

- 忘记下限：$\ln 1 = 0$ 令大部分的项在 $x = 1$ 处消失，但常数项 $-2/x$ 却不会消失，而整个极限值 2π 正是由它提供的。
- 毫无理由地断言 $(\ln a)^2/a \to 0$。只需写一行比较，例如 $\ln a < 4a^{1/4}$，便已足够。

STEP 之外

这是“加百列号角”（Gabriel's horn，即把 $y = 1/x$ 旋转而成）的近亲，后者是一个体积有限但表面积无限的立体：而在这里，连平面区域本身的面积也是无限的。代换 $x = \mathrm{e}^t$ 把体积化为 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \pi\,\Gamma(3) = 2!\,\pi$，让我们初次窥见伽玛函数（gamma function），$\Gamma(n+1) = n!$。怎样理解瑕积分（improper integral），以及“对数输给幂”这类比较，是大学一年级分析学（analysis）的核心课题；Abbott 的 *Understanding Analysis* 是阅读这方面内容的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。