详细解答

STEP II 2002，第 9 题

力学 · 抛体运动

STEP II 2002，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

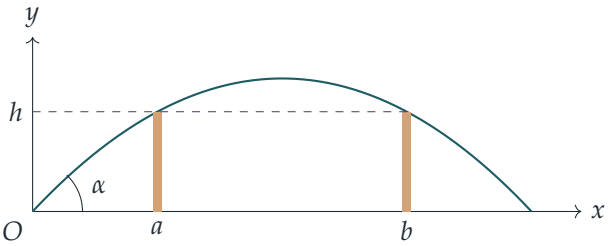
step.maths.org/questions/02-s2-q9

关键思路

先写出轨迹（path）的方程，把 y 表示成 x 的函数。“刚好越过两道墙”表示轨迹通过两道墙的墙顶，所以方程 $y = h$ 的根恰好是 $x = a$ 和 $x = b$。这是一条已知两根的二次方程（quadratic equation），把它与根之和及根之积（sum and product of roots）比较，便可一次过得出所有结果。至于第二部分，只需把两条公式对 h 求导（differentiate）。

解答

我们把质点（particle）看成只受重力作用而运动的一点（不计空气阻力（air resistance）），并取 O 为原点，x 轴水平，y 轴铅垂向上。按图中所示的情况，我们假设 $0 < a < b$、$h > 0$ 及 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$。



求 $\tan\alpha$ 和 V

初速度的分量为 $V\cos\alpha$ 和 $V\sin\alpha$，经过时间 t 后

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

利用 $t = x/(V\cos\alpha)$ 消去时间，得轨迹

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - kx^2, \qquad \text{其中} k = \frac{g\sec^2\alpha}{2V^2} = \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2V^2} > 0.$$

质点刚好越过每道墙，所以轨迹通过墙顶 (a,h) 和 (b,h)。因此 a 和 b 是以下方程的根：

$$x\tan\alpha - kx^2 = h, \qquad \text{即} \qquad kx^2 - x\tan\alpha + h = 0.$$

这是 x 的二次方程（因为 $k \neq 0$），所以它最多有两个根，故此它的根恰好就是 a 和 b。与根之和及根之积比较，

$$a + b = \frac{\tan\alpha}{k}, \qquad ab = \frac{h}{k}.$$

由第二式得 $k = h/(ab)$，再由第一式得

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h(a+b)}{ab}.}$$

最后，由 k 的定义，

$$\begin{aligned}\frac{2V^2}{g} = \frac{1+\tan^2\alpha}{k} &= \frac{ab}{h}\left(1 + \frac{h^2(a+b)^2}{a^2b^2}\right)\\ &= \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2 h}{ab},\end{aligned}$$

这正是所求的结果。

（值得留意的是，代入这些值后，轨迹就是 $y = \dfrac{h}{ab}x(a+b-x)$，一眼可见它在 $x = a$ 和 $x = b$ 时等于 h。）

把墙加高

第二个质点同样刚好越过两道墙，墙与原点的距离仍是 a 和 b，但高度变为 $h + \delta h$。所以把 h, α, V 换成 $h + \delta h, \alpha + \delta\alpha, V + \delta V$ 后，上面的公式依然成立：

$$\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h, \qquad \frac{2V^2}{g} = \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2}{ab}h.$$

两者都只是 h 的函数（a, b 固定），所以对于微小的变化，我们可以用 $\delta(\text{量}) \approx \dfrac{\mathrm{d}(\text{量})}{\mathrm{d}h}\delta h$。

角度。 把 $\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h$ 对 h 求导，得 $\sec^2\alpha\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}h} = \dfrac{a+b}{ab}$，所以

$$\sec^2\alpha\,\delta\alpha \approx \frac{a+b}{ab}\delta h.$$

由于 $\sec^2\alpha > 0$、$a, b > 0$ 及 $\delta h > 0$，右边是正数，所以 $\delta\alpha > 0$：质点必须以更陡的角度抛出。

想一想 这个“≈”只是一阶（first-order）近似。我们真的可以凭它断定 $\delta\alpha$ 的正负号吗?

可以，而且其实完全不需要取近似。$\tan\alpha$ 的公式对 h 是线性的，所以以下等式准确成立：$\tan(\alpha+\delta\alpha)-\tan\alpha=\frac{a+b}{ab}\,\delta h>0$。由于 tan 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上严格递增（strictly increasing），这就迫使 $\alpha+\delta\alpha>\alpha$，所以 $\delta\alpha>0$。

速率。 把 $\dfrac{2V^2}{g}$ 对 h 求导，

$$\frac{4V}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}=-\frac{ab}{h^2}+\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{abh^2}\left(h^2-\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right),$$

所以

$$\delta V\approx\frac{g(a+b)^2}{4Vabh^2}\left(h-\frac{ab}{a+b}\right)\left(h+\frac{ab}{a+b}\right)\delta h.$$

除了 $h-\frac{ab}{a+b}$ 之外，每个因子都是正数（因为 $V,a,b,h,\delta h>0$）。因此 δV 的正负号与 $h-\frac{ab}{a+b}$ 相同：若 $h>ab/(a+b)$ 则为正，若 $h<ab/(a+b)$ 则为负，这正是所求的结果。（由于这个导数在 $h=ab/(a+b)$ 以外都不等于零，只要 δh 足够小，一阶项确实决定了正负号。）

诠释。 与 $\tan\alpha=h(a+b)/(ab)$ 比较，条件 $h>ab/(a+b)$ 正好就是 $\tan\alpha>1$，即 $\alpha>45°$。作为 h 的函数，$2V^2/g$ 具有 $p/h+qh$ 的形式，它在 $h=\sqrt{p/q}=ab/(a+b)$ 时最小，此时 $\alpha=45°$ 而 $2V^2/g=2(a+b)$。所以：如果抛射角本来已经比 45° 陡，把墙加高便需要更大的速率；如果抛射角较平，把墙加高（同时令抛射角变陡，趋近 45°）所需的速率反而更小。

验算

- 取 $a=3\,\mathrm{m}$、$b=7\,\mathrm{m}$、$h=2.5\,\mathrm{m}$。那么 $\tan\alpha=25/21$，而 $2V^2/g=8.4+11.90\ldots=20.30\ldots\,\mathrm{m}$。用这些数值以数值方法逐步计算质点的运动，质点在 $x=3$ 和 $x=7$ 两处的高度都是 $2.5\,\mathrm{m}$（准确至 10^{-11}）。
- 对称性：答案对 a 和 b 是对称的，这是必然的，因为轨迹是一条以 $x=\frac{1}{2}(a+b)$ 为对称轴的抛物线（parabola）。
- 单位：ab/h 和 $(a+b)^2h/(ab)$ 都是长度，与 $2V^2/g$ 相符；而 $\tan\alpha$ 是无量纲（dimensionless）的。
- 当 $h=ab/(a+b)$ 时，我们得到 $\alpha=45°$ 及 $2V^2/g=2(a+b)$；对于 $a=3$、$b=7$，这个值是 $20\,\mathrm{m}$，比上面的 $20.30\,\mathrm{m}$ 略小，与它是最小值相符。

常见错误

- 为两道墙分别写出两条方程，然后硬解联立方程：这样做是可行的，但利用根之和与根之积，两行便可完成。
- 把 k 换回 V 时，忘记了 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$。
- 没有把 $2V^2/g$ 的导数因式分解（factorise）便直接说出 δV 的正负号：那个简洁的条件是由 $h^2 > a^2b^2/(a+b)^2$ 和 $h > 0$ 得出的。

STEP 之外

第二部分是一个小型的灵敏度分析（sensitivity analysis）：我们把映射 $h \mapsto (\alpha, V)$ 在某个解的附近线性化，然后读出输出如何随之变化。线性化（linearisation），以及与之相关的轨迹族包络线（envelope）的概念（即“安全抛物线”（parabola of safety），它是以某一给定速率所能到达的所有位置的边界），都是大学一年级力学和微积分课程的标准内容。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对抛体运动（projectile motion）和这些近似技巧都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。