详细解答

STEP II 2002，第 8 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP II 2002，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s2-q8

关键思路

每一条方程都是最简单的一阶线性方程（first-order linear equation）$y' = p(x)\,y$，所以在任何一个 p 由单一公式给出的区间上，解都是一个常数乘以 $\exp(\int p\,\mathrm{d}x)$。难处在于问题在 $x = 0$ 处被分成两段：两边各有一个任意常数（arbitrary constant），其中一边的常数由 y 的已知值确定，另一边的常数则只能靠要求两段在 $x = 0$ 处相接来确定。第一部分正是这个想法的预演，而第二部分则暗藏了一个绝对值（absolute value）。

解答

第一对方程

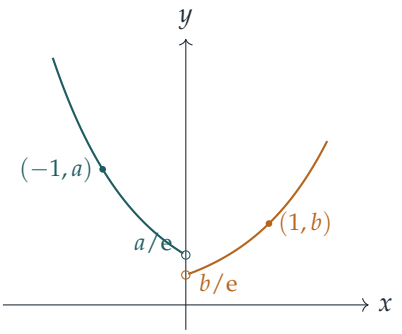
当 $x < 0$ 时，由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$ 得 $y = A\mathrm{e}^{-x}$，其中 A 为某个常数。（要看出没有其他解，可留意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}(y' + y) = 0$，所以 $y\mathrm{e}^{x}$ 在区间 $x < 0$ 上是常数。）由条件“在 $x = -1$ 处 $y = a$”得 $A\mathrm{e} = a$，所以

$$y = a\,\mathrm{e}^{-x-1} \qquad (x < 0).$$

同样地，当 $x > 0$ 时有 $y = B\mathrm{e}^{x}$，而在 $x = 1$ 处 $y = b$ 给出 $B = b/\mathrm{e}$，所以

$$y = b\,\mathrm{e}^{x-1} \qquad (x > 0).$$

当 $x \to 0^{-}$ 时，$y \to a/\mathrm{e}$；当 $x \to 0^{+}$ 时，$y \to b/\mathrm{e}$。一般而言这两个值并不相同，曲线在 y 轴处会出现跳跃。下图所示为 $a, b > 0$ 且 $a > b$ 的典型情况：左边是一条衰减的指数曲线，愈接近该轴愈低；右边是一条增长的指数曲线；空心圆圈标示两个（不同的）极限（limit）值。



曲线没有跳跃，当且仅当两个极限相等，即 $a/\mathrm{e} = b/\mathrm{e}$，也就是

$$a = b.$$

在这情况下，曲线为 $y = a\,\mathrm{e}^{|x|-1}$，是一条对称、形状像“V”的曲线，在 $x = 0$ 处有一个尖角。

含 $|\mathrm{e}^x - 1|$ 的方程

由于 $\mathrm{e}^x > 1$ 当且仅当 $x > 0$，

$$|\mathrm{e}^x - 1| = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & x < 0. \end{cases}$$

所以这条方程和先前一样，分成两条普通的线性方程。

当 $x > 0$ 时： $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$。$\mathrm{e}^x - 1$ 的一个原函数（antiderivative）是 $\mathrm{e}^x - x$，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^x - x)}\right) = 0$，于是

$$y = C\exp(\mathrm{e}^x - x).$$

在 $x = 1$ 处，$y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，所以 $C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，得 $C = \mathrm{e}$。因此

$$y = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1) \qquad (x \geq 0).$$

当 $x < 0$ 时： $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$。$1 - \mathrm{e}^x$ 的一个原函数是 $x - \mathrm{e}^x$，所以

$$y = D\exp(x - \mathrm{e}^x).$$

想一想 在 $x < 0$ 的范围内没有已知的数据点。那么 D 由甚么确定?

答案是在 $x = 0$ 处的连续性（continuity）。从右边趋近时，$y \to \exp(1 - 0 + 1) = \mathrm{e}^2$。从左边趋近时，$y \to D\exp(0 - 1) = D/\mathrm{e}$。令两者相等，得 $D = \mathrm{e}^3$，所以

$$y = \exp(x - \mathrm{e}^x + 3) \qquad (x < 0).$$

把两段合起来，

$$y = \begin{cases} \exp(e^x - x + 1), & x \geq 0, \\ \exp(x - e^x + 3), & x < 0. \end{cases}$$

留意这一次在 $x = 0$ 处连尖角也没有：两条公式都给出 $y'(0) = 0$，与 $|e^0 - 1|\, y = 0$ 吻合。由于 $y > 0$ 且 $|e^x - 1| \geq 0$，这个解处处递增，并在 $x = 0$ 处有一个驻点拐点（stationary point of inflection），该处 $y = e^2$。

极限

(i) 当 $x > 0$ 时，

$$y \exp(-e^x) = \exp(e^x - x + 1 - e^x) = e^{1-x} \to 0 \quad 当 x \to +\infty.$$

所以极限是 0：因子 $\exp(-e^x)$ 恰好把双重指数增长完全抵消，只剩下衰减的 e^{1-x}。

(ii) 当 $x < 0$ 时，

$$y\, e^{-x} = \exp(x - e^x + 3 - x) = \exp(3 - e^x) \to e^3 \quad 当 x \to -\infty,$$

因为 $e^x \to 0$。所以极限是 e^3。换句话说，当 x 是绝对值很大的负数时，这个解的表现就像 $e^3 e^x$，正如所料：在那里 $|e^x - 1| \approx 1$，方程近乎 $y' = y$。

验算

- 对答案求导：当 $x > 0$ 时，$y' = (e^x - 1)y$；当 $x < 0$ 时，$y' = (1 - e^x)y$。在 $x = 1$ 处，$\exp(e - 1 + 1) = e^e$。
- 数值上，用龙格—库塔法（Runge–Kutta method）由 $y(1) = e^e \approx 15.154$ 逐步倒推至 $x = 0$，得 $y(0) \approx 7.38906 = e^2$；继续推算至 $x = -5$，结果与 $\exp(x - e^x + 3)$ 吻合至六位有效数字（significant figures）。
- 就极限 (ii) 而言，在 $x = -10$ 处得 $ye^{-x} \approx 20.0846$，接近 $e^3 \approx 20.0855$；就 (i) 而言，在 $x = 10$ 处，$e^{1-x} \approx 1.2 \times 10^{-4}$。

常见错误

- 用 $x = 1$ 处的条件去确定 $x = 0$ 两边的常数。两个区间是各自独立的问题，左边的常数只能由连续性得出。
- 丢掉模（modulus）符号，对所有 x 求解 $y' = (e^x - 1)y$；这样在 $x < 0$ 时会得出错误的曲线，(ii) 的极限也会出错。
- 写出 $\int (e^x - 1)\, dx = e^x - x$ 之后，却写成 $\exp(e^x - x) = e^{e^x}/x$（正确的是 $e^{e^x} e^{-x}$）。

STEP 之外

方程 $y' = |e^x - 1|\, y$ 的系数在 $x = 0$ 处连续但不可微（differentiable）。关于 $y' = f(x, y)$ 的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem，即 Picard–Lindelöf 定理）只要求 f 对 x 连续、对 y 满足利普希茨（Lipschitz）条件，所以在这里单凭一个条件就能确定整条实数线上的解，而在 0 处的连续性是自动成立的。在第一部分，方程右边本身在 $x = 0$ 处出现跳跃，所以才需要额外的条件把两段接起来。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）讨论了一阶方程的这些存在性与唯一性问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。