详细解答

STEP II 2002，第 7 题

纯数学 · 直线的向量几何

> **STEP II 2002，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q7

关键思路

这里的一切都归结为点积（dot product）。一条通过原点、单位方向向量为 $\mathbf{u}$ 的直线，与 m_1 的夹角为 $\pi/4$，当且仅当 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_1|\cos\frac{\pi}{4}$，于是第一部分就化为联立方程。至于后半部分，“垂直”即点积等于零；而空间中两条直线只有在共面（coplanar）且不平行时才会相交，共面则等价于纯量三重积（scalar triple product）等于零。出人意表的是，共面的那个情况原来正是平行的情况。

解答

直线 m_3 和 m_4

设 $\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}+\mathbf{k}$，两者的长度均为 $\sqrt{2}$。设 $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ 为沿着一条通过 O 的直线的单位向量（unit vector）。两条直线之间的夹角是指它们之间的锐角，所以条件是

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4} = 1, \qquad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_2| = 1,$$

即 $a+b = \pm1$ 及 $a+c = \pm1$。以 $-\mathbf{u}$ 取代 $\mathbf{u}$ 会得出同一条直线，并把两个正负号同时反转，所以只需考虑两种情况。

同号：$a+b=1$，$a+c=1$。这时 $b=c=1-a$，而由 $a^2+b^2+c^2=1$ 得

$$a^2+2(1-a)^2 = 1 \iff 3a^2-4a+1=0 \iff (3a-1)(a-1)=0.$$

所以 $a=1$，得 $\mathbf{u}=\mathbf{i}$；或 $a=\frac{1}{3}$，得 $\mathbf{u}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$。

异号：$a+b=1, a+c=-1$。这时 $b=1-a, c=-1-a$，而由 $a^2+(1-a)^2+(1+a)^2=1$ 得 $3a^2+2=1$，此方程没有实数解。

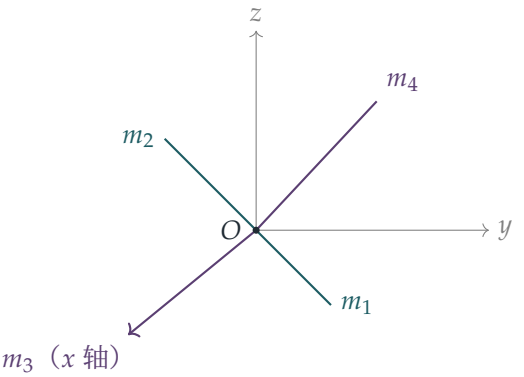
所以这两条直线的方向为

$$m_3:\ \mathbf{i}, \qquad m_4:\ \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

（两个标记对调亦无不可）。取单位向量 $\mathbf{e}_3=\mathbf{i}$ 及 $\mathbf{e}_4=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$，则

$$\cos\theta=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_4=\tfrac{1}{3},$$

此值为正数，所以这就是锐角：其余弦为 $\frac{1}{3}$。



设置各点

由于 A 位于 m_1 上，且与 O 的距离为 $\lambda\sqrt{2}$，它就是 $\pm\lambda(1,1,0)$；坐标须为非负数，故我们必须取 $A=\lambda(1,1,0)$，其中 $\lambda\geq 0$（由于 $\lambda\sqrt{2}$ 是距离，我们可以全程取 $\lambda\geq 0$）。同样地，$B=\lambda(1,0,1)$。在 m_3, m_4 上坐标为非负数的单位点是 $(1,0,0)$ 和 $\frac{1}{3}(1,2,2)$。

当中哪一点是 P、哪一点是 Q，取决于 m_3 和 m_4 的标记方式。但这并不要紧：反射 $(x,y,z)\mapsto(x,z,y)$ 把 A 和 B 对调，并保持 $(1,0,0)$ 和 $\frac{1}{3}(1,2,2)$ 两点不变，所以它把这个构形的一种标记方式变为另一种（直线 AQ 和 BP 的角色互换）。反射保持垂直关系和相交关系，所以只需取

$$A=(\lambda,\lambda,0),\quad B=(\lambda,0,\lambda),\quad P=(1,0,0),\quad Q=(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}).$$

于是

$$\overrightarrow{AQ}=(\tfrac{1}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}),\qquad \overrightarrow{BP}=(1-\lambda,\ 0,\ -\lambda).$$

第 (i) 部分

AQ 垂直于 BP，当且仅当 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}&=(\tfrac{1}{3}-\lambda)(1-\lambda)+0-\tfrac{2}{3}\lambda\\&=\lambda^2-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda=\lambda^2-2\lambda+\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

当 $(\lambda-1)^2=\frac{2}{3}$ 时，上式等于零，即

$$\lambda=1\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}=1\pm\tfrac{\sqrt{6}}{3}.$$

两个值都是正数（因为 $\sqrt{6}<3$），所以两者都符合非负条件，而这个二次方程再没有其他根。因此恰好有两个 λ 的值使得 $AQ\perp BP$，正如题目所求。

第 (ii) 部分

> **想一想** 怎样判断三维空间中的两条直线是否相交?

两条相异的直线相交，当且仅当它们位于同一平面上而且不平行。直线 AQ 和 BP 位于同一平面上，当且仅当 A、B、P、Q 四点共面，而这又当且仅当 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$ 的纯量三重积等于零。

这里 $\overrightarrow{AB}=(0,-\lambda,\lambda)$ 及 $\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,-\lambda,0)$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \lambda\cdot\tfrac{2}{3}(1-\lambda)+\lambda\Big[(1-\lambda)(\tfrac{2}{3}-\lambda)+\lambda(\tfrac{1}{3}-\lambda)\Big]$$

$$=\lambda\Big[\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda+\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}\lambda\Big]=2\lambda(\tfrac{2}{3}-\lambda),$$

这是沿第一行展开的结果。因此，对于 $\lambda\neq 0$，两条直线只有在 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时才有可能相交。

可是当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，

$$\overrightarrow{AQ}=(-\tfrac{1}{3},\,0,\,\tfrac{2}{3}),\qquad \overrightarrow{BP}=(\tfrac{1}{3},\,0,\,-\tfrac{2}{3})=-\overrightarrow{AQ},$$

所以两条直线平行。它们并不是同一条直线，因为 $\overrightarrow{BA}=(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ 不是 $\overrightarrow{BP}$ 的倍数，所以 A 不在 BP 上。两条相异的平行线永不相交。

所以对于每一个非零的 λ，直线 AQ 和 BP 都不相交，正如题目所求。（当 $\lambda=0$ 时，$A=B=O$，两条直线确实相交于 O，这正是题目把它排除在外的原因。）

验算

- 一望而知，$\mathbf{i}$ 与 $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ 的夹角为 $\pi/4$，这正好印证了二次方程的第一个根，令人安心。
- 当 $\lambda=1+\sqrt{2/3}\approx 1.8165$ 时，点积 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的数值计算结果为 0（准确至 10^{-16}），当 $\lambda\approx 0.1835$ 时亦然。
- 对 $\lambda=0.001,0.002,\ldots,5$ 计算直线 AQ 与 BP 之间的最短距离（并对 P 和 Q 的另一种标记方式作同样计算），结果从不为零；只有当 $\lambda\to 0$ 时，距离才趋向零。

常见错误

- 遗漏 $a+b=1$，$a+c=-1$ 这个情况：它虽然得不出任何解，但仍须加以排除。
- 写到“三重积在 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时等于零，所以两线相交”便停笔。共面的直线可以是平行的，而这里正是如此。

STEP 之外

纯量三重积是一个 3×3 行列式（determinant），它等于零即表示三个向量线性相关（linearly dependent）；两条歪斜线（skew lines）之间的最短距离 $|\overrightarrow{AB}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$，也是由同样的组件构成的。在大学一年级的线性代数（linear algebra）课程中，这些概念会通过行列式、秩（rank）和子空间（subspace）的几何统一起来。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）以大量三维图像阐述这些内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。