详细解答

STEP II 2002，第 6 题

纯数学 · 斜面上的直线

> **STEP II 2002，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q6

关键思路

整道题都建基于斜面（inclined plane）的一个事实：若斜面上的一条直线与最大斜率线（line of greatest slope）成角 ψ，则它与水平面所成的角 γ 满足

$$\sin\gamma = \cos\psi \, \sin\beta,$$

其中 β 是最大斜率线的倾角。有了这个结果，题目中每条直线都给出一条三角方程，而 l_1 与 l_3 互相垂直，则把一个余弦变成正弦。之后就只是代数运算了。

解答

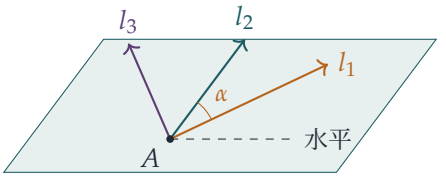
斜面上一条直线的斜度

以 A 为原点建立坐标轴，z 轴铅垂向上。设 $\mathbf{h}$ 为位于 P 内的水平单位向量（unit vector），并设 $\mathbf{u}$ 为沿最大斜率线 l_2 向上的单位向量，它在 P 内与 $\mathbf{h}$ 垂直。由于 l_2 与水平面成角 β，我们可取

$$\mathbf{h} = (1,0,0), \qquad \mathbf{u} = (0, \cos\beta, \sin\beta).$$

在 P 内与 $\mathbf{u}$ 成角 ψ 的单位向量是 $\mathbf{d} = \cos\psi\,\mathbf{u} + \sin\psi\,\mathbf{h}$，因为 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{h}$ 标准正交（orthonormal），并且张成（span）P。它的铅垂分量是 $\cos\psi\sin\beta$。若一条直线的单位方向向量为 $\mathbf{d}$，则它与水平面所成的角 γ 满足 $\sin\gamma =$ |铅垂分量，取自$\mathbf{d}$|，所以

$$\sin\gamma = |\cos\psi| \, \sin\beta. \qquad (*)$$



第一个位置

在 P 内，直线 l_1 与 l_2 成锐角（acute angle）α，而它与水平面所成的角是 $\pi/6$。由 $(*)$，

$$\cos\alpha\sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},$$

正是所要证明的结果（这里 $\cos\alpha > 0$，因为 α 是锐角）。

> **想一想** l_3 与 l_2 所成的角是多少?

三条直线都位于同一平面 P 内，并且都通过 A。由于 $l_3 \perp l_1$，l_3 的方向就是 l_1 的方向在 P 内转过一个直角所得的方向，所以 l_3 所成的角是 $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$，这是相对于 l_2 而言的（正负号取决于转动的方向，但并不影响结果）。无论哪一种情况，都有 $|\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2})| = \sin\alpha$，因为 α 是锐角。于是把 $(*)$ 用于 l_3，得

$$\sin\alpha\sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

把两个结果平方后相加，

$$\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}, \qquad \text{故} \qquad \sin^2\beta = \tfrac{3}{4}.$$

直线与水平面所成的角 β 位于 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 之内，所以 $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\beta = \pi/3$，正是所要证明的结果。（顺带一提，把两条方程相除可得 $\tan\alpha = \sqrt{2}$，这确实对应一个锐角，所以这个位置是存在的。）

转动后的位置

平面没有改变，因此 l_2 和 $\beta = \pi/3$ 也没有改变。现在 l_1 与 l_2 成锐角 θ，而 l_3 所成的角是 $\theta \pm \frac{\pi}{2}$，与之前完全一样。把 $(*)$ 分别用于两条直线，并代入 $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$：

$$\sin\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,$$
$$\sin 2\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

由于 2ϕ 是与水平面所成的角，故 $0 \le 2\phi \le \frac{\pi}{2}$，而且 $\phi \neq 0$，因为 $\cos\theta > 0$。所以 $\sin\phi > 0$，我们可以把第二条方程除以第一条：

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\phi}{\sin\phi} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{\sin\phi} = 2\cos\phi.$$

设 $t = \tan^2\theta$，则 $\cos^2\phi = t/4$ 及 $\sin^2\phi = 1 - t/4$。为了消去 θ，我们把 $\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta)$ 代入第一条方程的平方：

$$1 - \frac{t}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+t} \quad\Longrightarrow\quad (4-t)(1+t) = 3 \quad\Longrightarrow\quad t^2 - 3t - 1 = 0.$$

因此 $t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)$。由于 $t = \tan^2\theta \geq 0$ 而 $\sqrt{13} > 3$，我们必须取正号：

$$\tan^2\theta = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

正是所要证明的结果。

这个根确实可以达到：它给出 $\cos^2\phi = t/4 \approx 0.826$，所以 $\phi \approx 24.7^\circ$，$2\phi \approx 49.4^\circ < 90^\circ$，而 $\theta \approx 61.2^\circ$ 是锐角。

验算

- 在第一个位置，$\tan\alpha = \sqrt{2}$ 给出 $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$，$\sin\alpha = \sqrt{2/3}$，再配合 $\sin\beta = \sqrt{3}/2$，两个乘积分别是 $\frac{1}{2}$ 和 $1/\sqrt{2}$，与应有的结果相符。
- 以数值计算，$\tan^2\theta \approx 3.3028$，所以 $\tan\theta \approx 1.8174$，$\theta \approx 61.18^\circ$；于是 $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \approx 0.4175$ 给出 $\phi \approx 24.68^\circ$，而 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \approx 0.7589 \approx \sin(49.35^\circ) = \sin 2\phi$。
- $(*)$ 的极限情况：$\psi = 0$ 给出 l_2 本身（所成的角为 β），而 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 给出一条水平线（所成的角为 0）。

常见错误

- 误用 $\tan\gamma = \cos\psi\tan\beta$ 而不是 $\sin\gamma = \cos\psi\sin\beta$。只有当 ψ 是在水平的平面图上量度时，正切的版本才正确，但这里 α 和 θ 都是在 P 内量度的角。
- 忘记舍去负根 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$：平方数不可能是负数。

STEP 之外

公式 $(*)$ 其实就是一个点积（dot product）：直线与水平面所成角的正弦，就是它的单位向量在铅垂方向上的分量，而把这个向量用平面的一组标准正交基（orthonormal basis）表示出来，便完成了全部工作。把平面看成标准正交向量所张成的空间，把角看成点积，正是大学一年级线性代数（linear algebra）以及旋转几何的起点。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对这些想法有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。