详细解答

STEP II 2002，第 5 题

纯数学 · 逻辑斯谛映射的迭代

STEP II 2002，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s2-q5

关键思路

一切都取决于抛物线（parabola）$y = kx(1-x)$，它在 $[0,1]$ 上的最大值是 $\frac{k}{4}$，在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得。单凭这一点，就可以用归纳法（induction）解决第 (i) 部分。第 (ii) 和第 (iii) 部分先后要求找出不动点（fixed point）和周期（period）为二的点。第 (iii) 部分的窍门是把 x_1 用 b 表示：$x_1 = ka(1-a) = ab$。这样 $x_2 = a$ 就变成一条关于 b 的三次方程（cubic），而这条三次方程有一个明显的根（root），正好就是第 (ii) 部分的不动点。

解答

第 (i) 部分

我们对 n 使用归纳法。$n = 0$ 的情况是已知条件。假设 $0 < x_n < 1$，则 $x_n > 0$ 且 $1 - x_n > 0$，所以 $x_n(1-x_n) > 0$。利用配方法（completing the square），

$$x_n(1-x_n) = \frac{1}{4} - \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

由于 $0 < k < 4$，各项乘以 k 后不等式（inequality）方向不变，于是

$$0 < x_{n+1} = kx_n(1-x_n) \leq \frac{k}{4} < 1.$$

所以 $0 < x_{n+1} < 1$，由归纳法可知对所有 n 都有 $0 < x_n < 1$。留意每个假设在哪里用到：$k > 0$ 用于下界，$k < 4$ 用于上界。

第 (ii) 部分

要得到常数数列（constant sequence），只需 $x_1 = x_0$，即 $a = ka(1-a)$。由于 $a \neq 0$，可以除以 a 得 $1 = k(1-a)$；又由于 $a \neq 1$，可以除以 $1-a$：

$$k = \frac{1}{1-a}.$$

反过来，取这个 k 时有 $x_1 = a$，因此其后每一项也都是 a。

第 (iii) 部分

设 $b = k(1-a)$，则

$$x_1 = ka(1-a) = ab.$$

若 $x_2 = a$，数列便以周期二重复，所以整个条件就只是 $x_2 = a$：

$$k\,(ab)(1-ab) = a.$$

除以 $a \neq 0$，得 $kb(1-ab) = 1$。由于 $a \neq 1$，可以写成 $k = \dfrac{b}{1-a}$，所以

$$\frac{b^2(1-ab)}{1-a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - ab^3 = 1-a \quad \Longrightarrow \quad ab^3 - b^2 + (1-a) = 0,$$

这就是所要求的结果。

> ? **想一想** 这条三次方程有哪一个根可以一眼看出？它代表甚么？

代入 $b = 1$ 得 $a - 1 + 1 - a = 0$，所以 $b = 1$ 是一个根。但 $b = 1$ 即是 $k(1-a) = 1$，这正是第 (ii) 部分的不动点：此时 $x_1 = ab = a$。所以额外条件 $x_1 \neq a$，即 $ab \neq a$，恰好就是 $b \neq 1$。除去因式 $b - 1$：

$$ab^3 - b^2 + (1-a) = (b-1)(ab^2 + (a-1)b + (a-1)),$$

你可以展开来验证。所以 b 必须是

$$ab^2 - (1-a)b - (1-a) = 0$$

的一个不等于 1 的根。由于 $a \neq 0$，这确实是一条二次方程（quadratic），其根为

$$b = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a(1-a)}}{2a} = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2a}.$$

要有实根，需要 $(1-a)(1+3a) \geq 0$，即 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$。连同 $a \neq 0, 1$，余下的范围是 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$，$a \neq 0$。对于 a 的任何其他值，都没有实数 k 符合要求。

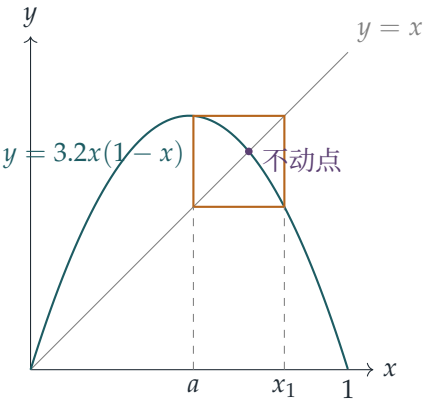
在这个范围内 $1-a>0$，所以除以 $1-a$ 便得到形式简洁的 $k=b/(1-a)$，当中用到 $\sqrt{(1-a)(1+3a)}/(1-a)=\sqrt{(1+3a)/(1-a)}$：

$$\boxed{k=\frac{1}{2a}\left(1\pm\sqrt{\frac{1+3a}{1-a}}\right),\qquad -\tfrac{1}{3}\le a<1,\ a\neq 0.}$$

最后还有一件事：我们必须确保这两个值都不是被排除的根 $b=1$。这条二次方程只有在 $a+(a-1)+(a-1)=0$，即 $a=\frac{2}{3}$ 时，才以 $b=1$ 为根。这时 $\sqrt{(1+3a)/(1-a)}=3$，两个值分别是 $k=3$（即 $b=1$，也就是不动点，故须排除）和 $k=-\frac{3}{2}$。所以：

- 当 $a=\frac{2}{3}$ 时，唯一的可能是 $k=-\frac{3}{2}$；
- 当 $a=-\frac{1}{3}$ 时，正负两个符号给出相同的值，$k=-\frac{3}{2}$；
- 对于其余所有容许的 a，两个符号都给出真正的 2-循环（cycle）。

下图显示了其中一个这样的循环，取 $k=3.2$。轨道（orbit）在 $a\approx 0.513$ 与 $x_1\approx 0.800$ 之间来回跳动，在抛物线与直线 $y=x$ 之间描出一个正方形。



验算

- 取 $a=0.7$。公式给出 $k\approx 3.0104$ 或 $k\approx -1.5818$。取 $k\approx 3.0104$ 时，得 $x_1\approx 0.6322$，然后 $x_2\approx 0.7000$，所以轨道的周期确实是二。
- 当 $a=\frac{2}{3}$ 时，$k=3$ 给出 $x_1=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，即不动点，与预期相符。取 $k=-\frac{3}{2}$ 时，得 $x_1=-\frac{1}{3}$ 和 $x_2=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{3})\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$，是真正的 2-循环。
- 数值上，对数以千计随机选取的 $a\in[-\frac{1}{3},1)$，不论取哪个符号，$x_2=a$ 都成立。对于该区间以外的 a，在 k 的范围内逐一搜索，除了不动点 $k=1/(1-a)$ 之外找不到任何解。

常见错误

- 忘记三次方程必定包含不动点那个解。看出 $b = 1$ 这个根，正是令三次方程变得容易处理的关键。
- 遗漏实根条件 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$，或没有留意到当 $a = \frac{2}{3}$ 时，k 的两个值之中有一个是不动点，必须舍去。
- 在第 (i) 部分只证明了 $x_{n+1} \leq \frac{1}{4}k$，却没有指出因为 $k < 4$，这个值严格小于 1。

STEP 之外

这就是逻辑斯谛映射（logistic map），是“规则简单而行为极其丰富”的经典例子。当 k 在通常的范围 $0 < k \leq 4$ 内，你找到的 2-循环恰好在 $k > 3$ 时存在：在 $k = 3$ 处，不动点失去稳定性，并分裂成两个点。这是第一次倍周期分岔（*period-doubling bifurcation*）。其后还会继续倍增，出现倍增的 k 值以几何方式愈聚愈密（其比率由费根鲍姆（Feigenbaum）常数决定），直至映射进入混沌（chaotic）状态。斯托加茨（Strogatz）的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非线性动力学与混沌》）以大学一年级的程度讲述了整个故事。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。