详细解答

STEP II 2002，第 4 题

纯数学 · 由积分推导不等式

STEP II 2002，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s2-q4

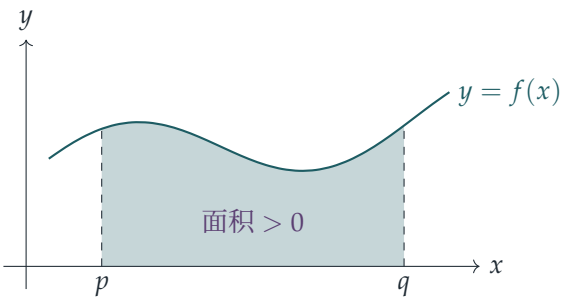
关键思路

二次式（quadratic）$as^2 - bs + c$ 若满足 $a > 0$ 和 $b^2 < 4ac$，便没有实根，而且首项系数为正，所以对每一个实数 s 都取正值。无论把 s 换成甚么（x、$\sin x$ 或 $1/x$），所得的函数都是正的，因此它在任何区间上的积分（integral）都是正的。于是每一部分要做的，只是选好代换和区间，使积分刚好给出所求不等式（inequality）中的那些数。

解答

开首的略图

积分 $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴之间由 $x = p$ 至 $x = q$ 的有向面积（signed area）：在轴上方的面积算作正，在轴下方的面积算作负。若在整个 $p < x < q$ 上都有 $f(x) > 0$，整条曲线在该处便位于轴的上方，所以这个区域没有负的部分，并且有真正（非零）的面积。因此积分严格为正。（本题所有函数都是连续（continuous）的，所以面积有明确定义。）



每一部分都会用到的事实

设 $g(s) = as^2 - bs + c$，其中 $a > 0$ 及 $b^2 < 4ac$。配方（completing the square）后得

$$g(s) = a\left(s - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

由于 $a > 0$，第一项至少为 0；又由于 $4ac - b^2 > 0$ 及 $a > 0$，第二项严格为正。所以对所有实数 s 都有 $g(s) > 0$。

第 (i) 部分

取 $f(x) = ax^2 - bx + c = g(x)$，它对所有 x 都是正的。我们可以在任何喜欢的区间上积分，而 $[0, 1]$ 给出的数最简单：

$$0 < \int_0^1 (ax^2 - bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c.$$

乘以 6 得 $2a - 3b + 6c > 0$，即 $3b < 2a + 6c$，这正是所要证明的。

第 (ii) 部分

现在 $f(x) = a\sin^2 x - b\sin x + c = g(\sin x)$。既然 g 在每一个实数上都取正值，它在 $\sin x$ 上当然也取正值，所以对所有 x 都有 $f(x) > 0$。

想一想 我们应该在哪一个区间上积分?

目标不等式中，π 乘在 a 和 c 上，却没有乘在 b 上。在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，$\int \sin x\,\mathrm{d}x = 1$ 不含 π，而 $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int 1\,\mathrm{d}x$ 则含有。利用 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$，

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

因此

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{4} - b + \frac{c\pi}{2}.$$

乘以 4 得 $a\pi + 2c\pi - 4b > 0$，即 $4b < (a + 2c)\pi$，这正是所要证明的。

第 (iii) 部分

想一想 哪一个函数的积分会给出 $\ln(q/p)$、$\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ 和 $q - p$?

它们分别是 $\int_p^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$、$\int_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_p^q 1\,\mathrm{d}x$。所以取

$$f(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

它在 $x > 0$ 时有定义而且连续, 并且由于 g 处处为正, 它在该处也是正的。因为 $q > p > 0$, 区间 $[p, q]$ 避开了 $x = 0$，所以

$$0 < \int_p^q \left(\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{a}{x} - b\ln x + cx\right]_p^q$$
$$= a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - b\ln\frac{q}{p} + c(q-p).$$

移项后得 $b\ln(q/p) < a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + c(q-p)$，这正是所要证明的。（条件 $p > 0$ 也让我们可以写出 $\ln q - \ln p = \ln(q/p)$，其中两个对数都有定义。）

验算

取 $a = b = c = 1$，则 $b^2 = 1 < 4 = 4ac$。这时 (i) 说 $3 < 8$，(ii) 说 $4 < 3\pi \approx 9.42$，而 (iii) 取 $p = 1$、$q = 2$ 时说 $\ln 2 \approx 0.693 < \frac{1}{2} + 1 = 1.5$。全部成立。我们还用 20 000 组符合条件的随机三元组 (a, b, c) 测试了全部三个不等式，当中包括 b^2 仅略小于 $4ac$ 的情况，并以辛普森法则（Simpson's rule）核对了每个积分。留意若没有这些条件，不等式可以不成立：$a = 1$、$b = 10$、$c = 1$ 会令 (i) 失效，因为 $30 > 8$。

常见错误

- 忘记说明为何 $f > 0$：条件 $a > 0$ 和 $b^2 < 4ac$ 正是令二次式取正值的原因，这一点必须写出来。
- 在 (ii) 中，误取 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，而正确的值是 $\frac{\pi}{4}$。
- 在 (iii) 中，没有提到 $p > 0$ 保证了 $x = 0$（f 在该处无定义）不在区间之内。

STEP 之外

“正的连续函数有正的积分”这个原理，是大学第一门分析课中为黎曼积分（Riemann integral）证明的基本性质之一。它与线性性质（linearity）结合起来，便是许多经典不等式的来源，其中包括柯西－施瓦兹不等式（Cauchy–Schwarz inequality）的积分形式：把平方 $(f + tg)^2 \geq 0$ 积分，再用上与本题相同的判别式（discriminant）论证，便可得出。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门教科书）正是从这个角度仔细地建立积分理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。