详细解答

STEP II 2002，第 2 题

纯数学 · 倒数多项式方程

> **STEP II 2002，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q2

关键思路

由外至内观察各项系数：先是 1 和 1，然后是 5 和 -5，最后是中间的 4。系数成对相等或成对异号，表示把方程除以 z 的中间次幂之后，只会剩下 $z^k + z^{-k}$ 和 $z^k - z^{-k}$ 的组合，而这些式子每一个都是 $w = z - z^{-1}$ 的多项式（polynomial）。这样次数（degree）便减半。那个八次方程也有相同的结构，而且化简之后，竟然再一次出现这种结构，所以这个技巧要用两次。

解答

四次方程

由于 $z = 0$ 不是根（root）（常数项是 1），我们可以除以 z^2：

$$z^2 + 5z + 4 - 5z^{-1} + z^{-2} = 0, \qquad \text{即} \qquad \left(z^2 + z^{-2}\right) + 5\left(z - z^{-1}\right) + 4 = 0.$$

设 $w = z - z^{-1}$，则 $w^2 = z^2 - 2 + z^{-2}$，所以 $z^2 + z^{-2} = w^2 + 2$。代入得

$$(w^2 + 2) + 5w + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + 5w + 6 = 0,$$

正如题目所求。此式可因式分解（factorise）为 $(w + 2)(w + 3) = 0$，所以 $w = -2$ 或 $w = -3$。

要回到 z，把 $z - z^{-1} = w$ 两边乘以 z：

$$z^2 - wz - 1 = 0.$$

▶ $w = -2$：$z^2 + 2z - 1 = 0$，所以 $z = -1 \pm \sqrt{2}$。

▶ $w=-3$：$z^2+3z-1=0$，所以 $z=\frac{1}{2}\left(-3\pm\sqrt{13}\right)$。

这四个互不相同的值就是该四次方程的根：

$$z=-1\pm\sqrt{2},\qquad z=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

八次方程

同样，$z=0$ 不是根，所以我们除以 z^4，并把系数以中间项为中心对称地配对：

$$2\left(z^4+z^{-4}\right)-3\left(z^3-z^{-3}\right)-12\left(z^2+z^{-2}\right)+12\left(z-z^{-1}\right)+22=0.$$

（核对各对系数：z^8 和 z^0 的系数都是 2；z^7 的系数是 -3，z^1 的系数是 $+3$；z^6 和 z^2 的系数都是 -12；z^5 的系数是 12，z^3 的系数是 -12。）

我们需要把每个括号都以 $w=z-z^{-1}$ 表示。已知 $z^2+z^{-2}=w^2+2$。取立方，

$$w^3=z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}\quad\Longrightarrow\quad z^3-z^{-3}=w^3+3w,$$

再把 z^2+z^{-2} 平方，

$$z^4+z^{-4}=\left(z^2+z^{-2}\right)^2-2=(w^2+2)^2-2=w^4+4w^2+2.$$

代入得

$$\begin{aligned}0&=2(w^4+4w^2+2)-3(w^3+3w)-12(w^2+2)+12w+22\\&=2w^4-3w^3-4w^2+3w+2.\end{aligned}$$

想一想 现在剩下一个 w 的四次方程。我们有甚么得着吗？

有：看看它的系数 2, -3, -4, 3, 2。它们的规律与之前完全一样（最外面的一对相等，其次的一对异号），所以同一个技巧可以在下一层再用一次。由于 $w=0$ 不是根，除以 w^2：

$$2\left(w^2+w^{-2}\right)-3\left(w-w^{-1}\right)-4=0.$$

设 $v=w-w^{-1}$，于是 $w^2+w^{-2}=v^2+2$：

$$2(v^2+2)-3v-4=0\quad\Longleftrightarrow\quad 2v^2-3v=0\quad\Longleftrightarrow\quad v(2v-3)=0.$$

所以 $v=0$ 或 $v=\frac{3}{2}$。现在利用 $w^2-vw-1=0$ 逐层还原：

▶ $v=0$：$w^2=1$，所以 $w=\pm1$。

▶ $v=\frac{3}{2}$：$2w^2-3w-2=0$，即 $(2w+1)(w-2)=0$，所以 $w=2$ 或 $w=-\frac{1}{2}$。

最后利用 $z^2 - wz - 1 = 0$ 再还原一次：

- $w = 1$：$z^2 - z - 1 = 0$，所以 $z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = -1$：$z^2 + z - 1 = 0$，所以 $z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = 2$：$z^2 - 2z - 1 = 0$，所以 $z = 1 \pm \sqrt{2}$。
- $w = -\frac{1}{2}$：$2z^2 + z - 2 = 0$，所以 $z = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$。

每个二次方程 $z^2 - wz - 1 = 0$ 的判别式（discriminant）都是 $w^2 + 4 > 0$，所以这些根全是实数，而且这八个值互不相同。由于八次多项式最多只有八个根，这些就是全部的根：

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = 1 \pm \sqrt{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

验算

- 由 $z^2 - wz - 1 = 0$ 得出的每一对根，乘积都是 -1，可以用来快速检查计算有没有出错：例如 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$。
- 对于八次方程，各根之和应为 $\frac{3}{2}$（即 z^7 的系数除以 z^8 的系数，再取负号）。四对根的贡献是 $1 - 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$。正确。
- 以数值计算，$z = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) \approx 0.7808$ 代入八次多项式所得的值与零相差不超过 10^{-9}，其余七个根以及四次方程的四个根亦然。

常见错误

- 写成 $z^3 - z^{-3} = w^3$：交叉项会多出 $3w$。
- 得到 w 的四次方程后便停下来，尝试用试根的方法把它因式分解，而没有留意到它的系数具有相同的对称性。
- 只给出 w（或 v）的值，忘记回到 z。

STEP 之外

如果一个多项式的系数倒过来读仍然一样（或者只差交错的正负号），便称为*倒数多项式*（reciprocal polynomial）或*回文多项式*（palindromic polynomial）；它们的根成对出现，每对之间以 $z \mapsto 1/z$ 或 $z \mapsto -1/z$ 相联系，而本题的代换正是这种对称性所容许的化简。在伽罗瓦理论（Galois theory）中，这相当于观察到方程在根的某一组变换所构成的群（group）之下保持不变，因此可以经由一连串较小的方程分阶段求解，本题的情况正是

如此：先是八次，然后四次，再到二次。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是了解这些想法如何发展的好读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。