详细解答

STEP II 2002，第 11 题

力学 · 摩擦力与极限平衡

STEP II 2002，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s2-q11

关键思路

第一部分是直接的质心（centre of mass）积分；代换 $t = x/l$ 之后一行便可完成。至于梯子，“两端同时处于极限状态”令四个接触力全部化为同一个未知量的倍数，因此分解两次，再对 A 取力矩（moment），立即得出 $\tan\theta$。最后一部分还需要多一个想法：横梁竖得愈陡便愈安全，所以“对每个 $\theta < \pi/4$ 都会滑动”即是说极限角至少为 $\pi/4$。

解答

质心

距离 B 为 x 处、长度为 δx 的一小段，其重量为 $\alpha W l^{-1}(x/l)^{\alpha-1}\,\delta x$。设 $t = x/l$（故 $\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}t$），总重量为

$$\int_0^l \frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = W,$$

正如所料（由于 $\alpha > 0$，此积分收敛）。重量对 B 的力矩为

$$\int_0^l x\,\frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W l\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha W l}{\alpha+1}.$$

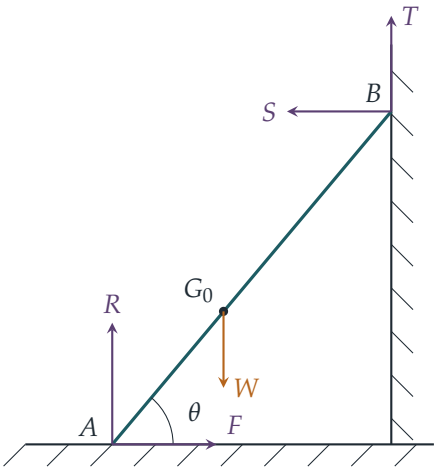
除以 W，可知质心 G_0 与 B 的距离为 $\alpha l/(\alpha+1)$，正是所求。因此它与 A 的距离为

$$d = l - \frac{\alpha l}{\alpha+1} = \frac{l}{\alpha+1}$$

稍后对 A 取力矩时，用的就是这个距离。

两端同处极限平衡

把横梁看成刚性杆（rigid rod），在 A 和 B 两处均为粗糙接触。若横梁滑动，A 会远离墙壁，B 会向下移动，所以摩擦力（friction）在 A 处指向墙壁，在 B 处向上。设地面在 A 处施加法向反作用力（normal reaction）R 和摩擦力 F，墙壁在 B 处施加法向反作用力 S 和摩擦力 T。重量作用于 G_0，与 A 相距 $l/(\alpha+1)$。



沿水平和垂直方向分解，并对 A 取力矩（重量的作用线与 A 的水平距离为 $d\cos\theta$；B 的高度为 $l\sin\theta$，水平距离为 $l\cos\theta$）：

$$F = S,$$
$$R + T = W,$$
$$S\,l\sin\theta + T\,l\cos\theta = W\,\frac{l}{\alpha+1}\cos\theta.$$

两端同处极限状态，即 $F=\mu R$ 及 $T=\mu S$。于是 $S=F=\mu R$，$T=\mu S=\mu^2 R$，而垂直方向的方程给出

$$R(1+\mu^2)=W, \qquad \text{所以} \qquad S=\frac{\mu W}{1+\mu^2},\quad T=\frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}.$$

把力矩方程除以 $l\cos\theta$ 再代入，

$$\frac{\mu W}{1+\mu^2}\tan\theta+\frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}=\frac{W}{1+\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \mu\tan\theta=\frac{1+\mu^2}{1+\alpha}-\mu^2=\frac{1-\alpha\mu^2}{1+\alpha},$$

即

$$\tan\theta=\frac{1-\alpha\mu^2}{(1+\alpha)\mu},$$

正是所求。把这个角记作 θ_0，并设 $t_0=\tan\theta_0$。

μ 的最大值

? **想一想** 为甚么“对每个 $\theta < \pi/4$ 都会滑动”可以化为关于 θ_0 的条件?

我们证明:平衡(equilibrium)可能成立,当且仅当 $\tan\theta \geq t_0$。设 $t = \tan\theta$ 及 $k = 1/(1+\alpha)$,则力矩方程可写成 $St + T = kW$。摩擦定律为 $F \leq \mu R$ 及 $|T| \leq \mu S$。

必要性(*necessity*)。由 $T \leq \mu S$ 及 $S = F \leq \mu R = \mu(W - T)$ 得 $T \leq \mu^2(W - T)$,所以 $T \leq \mu^2 W/(1+\mu^2)$。另外 $S \leq \mu(W - T)$,故

$$kW = St + T \leq \mu t(W - T) + T = \mu t W + (1 - \mu t)T.$$

若 $\mu t < 1$,利用 T 的上界可得 $kW \leq W(\mu t + \mu^2)/(1+\mu^2)$,整理后即 $t \geq t_0$。若 $\mu t \geq 1$,则无论如何都有 $t \geq 1/\mu > t_0$,因为 $\mu t_0 = (1 - \alpha\mu^2)/(1+\alpha) < 1$。两种情况下,平衡都迫使 $t \geq t_0$。

充分性(*sufficiency*)。若 $t \geq t_0$(且 $t > 0$),取墙壁的摩擦力为极限值 $T = \mu S$,由力矩方程得 $S = kW/(t+\mu)$,并取 $F = S$,$R = W - T$。余下唯一的条件是 $S \leq \mu R$,即 $S(1+\mu^2) \leq \mu W$,即 $k(1+\mu^2) \leq \mu(t+\mu)$,而这恰好就是 $t \geq t_0$。(此时亦有 $R > 0$。)

因此,横梁在角 θ 时滑动,当且仅当 $\tan\theta < t_0$。“对每个 $\theta < \pi/4$ 都会滑动”即 $t_0 \geq 1$:若 $t_0 \geq 1$,每个 $\theta < \pi/4$ 都满足 $\tan\theta < 1 \leq t_0$;若 $t_0 < 1$,任何满足 $\max(t_0, 0) < \tan\theta < 1$ 的角都小于 $\pi/4$,却处于平衡。

取 $\alpha = \frac{3}{2}$,

$$t_0 = \frac{1 - \frac{3}{2}\mu^2}{\frac{5}{2}\mu} = \frac{2 - 3\mu^2}{5\mu} \geq 1 \iff 3\mu^2 + 5\mu - 2 \leq 0 \iff (3\mu - 1)(\mu + 2) \leq 0,$$

其中两边乘以了 $5\mu > 0$。由于 $\mu + 2 > 0$,上式成立当且仅当 $\mu \leq \frac{1}{3}$。所以最大可能值为

$$\mu = \tfrac{1}{3}.$$

验算

- 当 $\alpha = 1$ 时横梁是均匀的,公式变成 $\tan\theta = (1 - \mu^2)/(2\mu)$,正是两端摩擦系数相同的均匀梯子的常见结果。
- 当 $\mu = \frac{1}{3}$、$\alpha = \frac{3}{2}$ 时:$t_0 = (2 - \frac{1}{3})/\frac{5}{3} = 1$,恰好等于 1,所以极限角为 $\pi/4$。数值上,$\mu = 0.332$ 给出 $t_0 \approx 1.004$,而 $\mu = 0.334$ 给出 $t_0 \approx 0.996$。
- 当 $\alpha \to \infty$ 时,质量集中于 B($d \to 0$),对任何 $\mu > 0$,$\tan\theta$ 都变为负数:横梁在任何角度都能竖立。这很合理,因为此时重量几乎作用在墙壁上。

常见错误

- 在力矩方程中把 $\alpha l/(\alpha+1)$ 当作与 A 的距离；它其实是由 B 量起的。
- 把墙壁的摩擦力画成向下：横梁滑动时 B 向下滑，所以横梁在 B 处所受的摩擦力向上。
- 把最后的不等式方向弄反：较陡的横梁较安全，所以“在 $\pi/4$ 以下会滑动”需要 $\tan\theta_0 \geq 1$，而最大的 μ 令 θ_0 恰好等于 $\pi/4$。

STEP 之外

上面的必要性与充分性论证，其实是一个小型的线性规划（linear programming）问题：摩擦定律界定了一个由可容许的力组成的凸区域（convex region），而当力矩直线与这个区域相交时，平衡便可能成立。像本题这类静不定（statically indeterminate）问题，即单凭方程不足以确定各力的问题，是大学一年级力学和工程学的常见课题。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）正是以这种严谨的方式处理摩擦、力矩和刚体平衡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。