详细解答

STEP II 2002，第 10 题

力学 · 运动学与最优化

STEP II 2002，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s2-q10

关键思路

总路程是固定的，所以完成比赛的时间 T 与转换速度的时刻 t 由一条方程联系在一起。去分母后，它变成一条关于 t 的二次方程（quadratic），而某个时间 T 可以达到，当且仅当这条二次方程有实根。由判别式（discriminant）条件可直接得出 T 的最小值，完全不需要微积分。至于第二部分，一旦知道两名跑手的位置如何随时间变化，二人之间的距离便是一个分段二次函数（piecewise quadratic），我们用惯常的方法求其最大值即可。

解答

以下距离一律以 km 为单位，时间以小时为单位，并且 $42\frac{3}{8} = \frac{339}{8}$。

最短的比赛时间

第一名参赛者在最初 t 小时内跑了 $13t$，然后在余下的 $T-t$ 小时内跑了 $(14+\frac{2t}{T})(T-t)$。因此

$$13t + \left(14 + \frac{2t}{T}\right)(T-t) = \frac{339}{8}.$$

展开后得 $13t + 14T - 14t + 2t - \dfrac{2t^2}{T} = \dfrac{339}{8}$，即

$$t + 14T - \frac{2t^2}{T} = \frac{339}{8}.$$

两边乘以 $T > 0$，并按 t 的幂次整理：

$$2t^2 - Tt + \left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) = 0. \qquad (*)$$

想一想 我们要求最小的 T，但 T 并不是以 t 的函数形式给出的。怎样才能判断哪些 T 值是有可能出现的呢?

某个 T 值能够出现，当且仅当 $(*)$ 有实数解 t，所以它的判别式必须非负：

$$T^2 - 8\Big(\frac{339}{8}T - 14T^2\Big) \geq 0 \iff 113T^2 - 339T \geq 0 \iff 113T(T-3) \geq 0.$$

由于 $T > 0$，这就迫使 $T \geq 3$。

这个下界是可以达到的。当 $T = 3$ 时，判别式为零，$(*)$ 变成

$$2t^2 - 3t + \Big(\frac{1017}{8} - 126\Big) = 2t^2 - 3t + \frac{9}{8} = 2\Big(t - \frac{3}{4}\Big)^2 = 0,$$

所以 $t = \frac{3}{4}$。这个值介乎 0 与 T 之间，因此确实是一个可行的比赛方案：先以速率 13 跑 45 分钟，然后在余下的 $2\frac{1}{4}$ 小时以速率 $14 + \frac{2(3/4)}{3} = 14.5$ 跑完。事实上 $13 \cdot \frac{3}{4} + 14.5 \cdot \frac{9}{4} = 9.75 + 32.625 = 42.375$。因此 T 的最小可能值是 3，正如题目所要求。

（等价地，对 $(*)$ 作隐函数求导（implicit differentiation）并令 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$，可得 $T = 4t$，代回去便得 $T = 3$。判别式的论证有一个好处：它证明了 3 是全局最小值（global minimum），而不仅仅是一个驻值（stationary value）。）

最大的相隔距离

设 τ 为起跑后所经过的时间。第二名参赛者的速率是 $16 - k\tau$，其中 k 为某个常数，所以其所跑的距离是

$$s_2(\tau) = 16\tau - \tfrac{1}{2}k\tau^2.$$

由 3 小时跑毕全程得 $48 - \frac{9}{2}k = \frac{339}{8}$，所以 $\frac{9}{2}k = \frac{45}{8}$，$k = \frac{5}{4}$。于是 $s_2 = 16\tau - \frac{5}{8}\tau^2$，而速率由 16 下降至 12.25，一直保持为正。

第一名参赛者同样用了 3 小时，根据第一部分，这表示 $t = \frac{3}{4}$。其所跑的距离是

$$s_1(\tau) = \begin{cases} 13\tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{39}{4} + \frac{29}{2}(\tau - \frac{3}{4}), & \frac{3}{4} \leq \tau \leq 3. \end{cases}$$

设 $d = s_2 - s_1$。第二名跑手起步较快，所以我们预期 $d \geq 0$。

当 $0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}$：$d = 3\tau - \frac{5}{8}\tau^2$，而 $\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\tau} = 3 - \frac{5}{4}\tau > 0$。所以 d 在这个区间上递增，升至 $d(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4} - \frac{45}{128} = \frac{243}{128}$。

当 $\frac{3}{4} \leq \tau \leq 3$：

$$d = 16\tau - \tfrac{5}{8}\tau^2 - \tfrac{39}{4} - \tfrac{29}{2}\tau + \tfrac{87}{8} = \tfrac{1}{8}(9 + 12\tau - 5\tau^2) = \tfrac{1}{8}(3-\tau)(3+5\tau).$$

这是一条开口向下的抛物线，顶点位于 $\tau = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$，落在 $[\frac{3}{4}, 3]$ 之内。（等价地，当两人速率相等时，差距便停止扩大：$16 - \frac{5}{4}\tau = 14.5$。）在该处

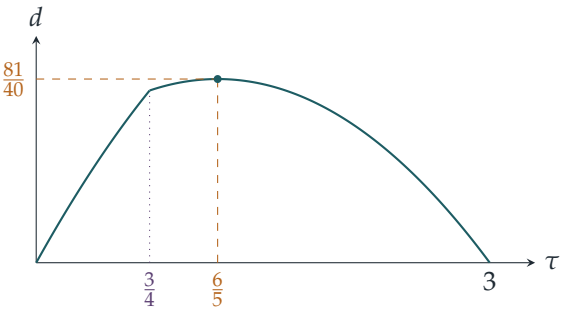
$$d(\tfrac{6}{5}) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot 9 = \tfrac{81}{40}.$$

由因式分解后的形式可见，$d \geq 0$ 在整个区间上成立，并在终点降至 0，这是必然的。

比较两段的结果，$\frac{81}{40} = 2.025 > \frac{243}{128} \approx 1.898$。所以两名跑手之间的最大距离是

$$\boxed{\tfrac{81}{40}\ \text{km} = 2.025\ \text{km}},$$

在开赛后 1.2 小时（72 分钟）达到，当时第二名参赛者领先。



验算

- 两名跑手都在 $\tau = 3$ 时冲线，而公式给出 $d(3) = 0$，这是必然的。
- 第二段的最大值恰好出现在两人速率相等（同为 14.5）之时，这正是差距停止扩大的自然条件。
- 数值验证：在一组细密的 t 值上解这条关于 T 的二次方程，得出最小的 T 为 3.000，出现在 $t = 0.75$；在 $[0, 3]$ 内的 300 000 个时刻计算 d，得出最大值为 2.025，出现在 $\tau = 1.2$，并且 $d \geq 0$ 始终成立。

常见错误

- 直接套用第一名参赛者的最短时间方案，却没有留意到正是“跑步时间为 3 小时”这个条件确定了 $t = \frac{3}{4}$。
- 只在转折点 $\tau = \frac{3}{4}$ 处求最大值：转换速度之后差距仍会继续扩大，因为直到 $\tau = \frac{6}{5}$ 之前，第二名跑手的速率仍然高于 14.5。
- 把第二名跑手所跑的距离写成 $16\tau - k\tau^2$，忘记了对线性递减的速率积分时所产生的 $\frac{1}{2}$。

STEP 之外

第一部分是在约束条件下求最优值（optimisation），而约束是由 $F(t,T)=0$ 以隐式给出的。提出“对哪些 T，解 t 才存在?”这个问题，正是隐函数定理（implicit function theorem）背后的想法，更一般地说，也是拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）背后的想法：在最优点处，约束的等高线（level curve）满足 $\partial F/\partial t=0$，而这正是本题中的重根条件。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）全书以微积分处理运动学（kinematics），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多 STEP 风格的最优化题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。