详细解答

# STEP II 2002，第 1 题

纯数学 · 代换积分法

**STEP II 2002，第 1 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s2-q1

## 关键思路

倍角公式（double-angle formula）把 $1-\cos 2\theta$ 化为 $2\sin^2\theta$，而 $\operatorname{cosec}^2\theta$ 是一眼就能积分的函数。题目建议的代换（substitution）$x=\sin 2\theta$ 是特意设计的，使 $\sqrt{1-x^2}$ 变成 $\cos 2\theta$，从而把第二个积分（integral）拉回第一个积分。至于最后一个积分，积分限（limits）1 和 $2/\sqrt{3}$ 正是积分限 1 和 $\sqrt{3}/2$ 的倒数（reciprocal），这强烈暗示应该试用 $y=1/x$。

## 解答

### 第一个积分

由于 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$，我们有 $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$，它在 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 上为正，所以被积函数（integrand）在该区间上性质良好。利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cot\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta$，

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big[-\cot\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cot\tfrac{\pi}{6} - \cot\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

正如所求。

### 第二个积分

设 $x=\sin 2\theta$，则 $\mathrm{d}x = 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$。当 $\theta=\frac{1}{6}\pi$ 时，$x=\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $\theta=\frac{1}{4}\pi$ 时，$x=\sin\frac{1}{2}\pi=1$。当 $\theta$ 走遍 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 时，$x$ 由 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 稳定地递增至 1。

**想一想** $\sqrt{1-x^2}$ 等于 $\cos 2\theta$，还是等于 $-\cos 2\theta$?

我们有 $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta} = |\cos 2\theta|$。在我们的范围内 $2\theta \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$，此处 $\cos 2\theta \geq 0$，所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos 2\theta$。因此

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

为了引入第一个积分，把分子用分母来表示：

$$\frac{\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{1-(1-\cos 2\theta)}{1-\cos 2\theta} = \frac{1}{1-\cos 2\theta} - 1.$$

于是，利用第一个结果，

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta - 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

正如所求。

### 最后一个积分

设 $y = 1/x$，则 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$。当 $y = 1$ 时，$x = 1$；当 $y = 2/\sqrt{3}$ 时，$x = \sqrt{3}/2$。在这个范围内 $x > 0$，所以

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$y\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

**想一想** $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$ 中的负号到哪里去了?

这个代换把积分限的次序颠倒了，把它们调换回来时正好抵销了负号：

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{y\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)}\,\mathrm{d}y &= \int_{1}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

$x^2$ 这个因子刚好完全约去，这正是分母中要多放一个因子 $y$ 的原因。

## 验算

- 第二个和第三个积分的被积函数都是正的，所以答案必须为正。事实上 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}\approx 0.73205-0.52360=0.20845$。
- 对三个积分分别使用辛普森法则（Simpson's rule），第一个得 $0.366025\ldots$（与 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ 吻合），第二个和第三个得 $0.208452\ldots$（与 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}$ 吻合）。
- 粗略估算：在第二个积分中，区间的长度为 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134$，而被积函数由 2（在 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 处）下降至 1（在 $x=1$ 处），所以积分值应介乎 0.134 与 0.268 之间。结果确实如此。

## 常见错误

- 没有检查 $\cos 2\theta$ 在该范围内的正负号，就写下 $\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\cos 2\theta$。
- 忘记更改积分限，或在 $y=1/x$ 令积分限次序颠倒时漏掉负号。
- 把 $\left[-\cot\theta\right]$ 算成 $\cot\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{6}$，这样得出的数值大小正确，但正负号错了。

## STEP 之外

最后一部分是一个普遍原则的小例子：代换是一种变量变换（change of variables），可以把一个积分准确地对应到另一个积分上，而留意到积分限互为倒数，就是 $y=1/x$ 能够奏效的可靠提示。在大学的第一门分析（analysis）课程中，代换法会由链式法则（chain rule）和微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）严格地推导出来，并要小心留意代换在何处单调（monotonic）、被积函数在何处连续（continuous），这些正是我们在这里检查过的条件。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门教科书）对这些运算背后的理论有清晰的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。