详细解答

STEP I 2002，第 9 题

力学 · 斜面上的倾倒

STEP I 2002，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

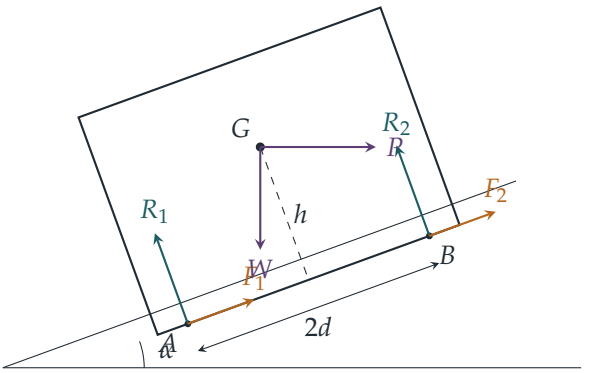
step.maths.org/questions/02-s1-q9

关键思路

货车是处于平衡（equilibrium）状态的刚体（rigid body），所以我们有三条方程：沿斜面方向分解力、沿垂直于斜面的方向分解力，以及取力矩（moments）。绕 G 取力矩是聪明的选择，因为重量和 P 都通过 G，两者一并消失，只剩下车轮上的力。这一条方程把两个法向反作用力（normal reaction）之差与总摩擦力（friction）联系起来，几乎包办了全部工作。于是“不翻倒”的意思不过是：两个法向反作用力都不是负数。

解答

我们把货车视为刚体，其车轮与斜面在两点接触，即 A（较低）和 B（较高），两点相距 $2d$。设 A 处的法向反作用力为 R_1，B 处的为 R_2，并设摩擦力为 F_1 和 F_2，两者均以沿斜面向上为正（任何一个最后都可能是负数）。我们假设摩擦力足以防止滑动；题目只关乎翻倒。如图所示，P 是水平的，指向斜面，所以它有沿斜面向上的分量 $P\cos\alpha$，以及压向斜面的分量 $P\sin\alpha$。



沿垂直于斜面的方向和沿斜面方向分解力（以沿斜面向上为正）：

$$R_1 + R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = W\sin\alpha - P\cos\alpha. \tag{2}$$

现在绕 G 取力矩。重量和 P 的作用线都通过 G，所以它们没有任何贡献。每个法向反作用力与 G 的垂直距离为 d，而每个摩擦力沿斜面作用，与 G 的垂直距离为 h。以逆时针方向为正（如图所示，斜面向右上升），R_2 使货车绕 G 逆时针转动，R_1 使它顺时针转动，而沿斜面向上的摩擦力作用于 G 的下方，使它逆时针转动。所以

$$d(R_2 - R_1) + h(F_1 + F_2) = 0. \tag{3}$$

第 (i) 部分

若 $R_1 = R_2$，方程 (3) 变成 $h(F_1 + F_2) = 0$。由于 $h > 0$，可得 $F_1 + F_2 = 0$：摩擦力之和为零，正是所要证明的。

（由 (2) 可知，这种情况恰好在 $P = W\tan\alpha$ 时出现：P 沿斜面向上的部分刚好抵销重量沿斜面向下的部分，所以斜面无须提供任何净摩擦力。）

第 (ii) 部分

把 (2) 代入 (3)，

$$R_2 - R_1 = \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

再与 (1) 结合，

$$2R_1 = W\cos\alpha + P\sin\alpha - \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

$$2R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha + \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha).$$

? **想一想** 用这些方程来说，“不翻倒”是甚么意思?

地面可以推车轮，却不能拉住它，所以每个法向反作用力都必须满足 $R \geq 0$。假如 R_2 的公式算出来是负数，较高的车轮就要靠外力压住才行；实际上它会离地，货车绕 A 转动。同样，$R_1 < 0$ 表示绕 B 转动。所以货车保持直立，当且仅当 $R_1 \geq 0$ 且 $R_2 \geq 0$。

以下我们一直使用 $\frac{d}{h} = \tan\beta$，其中 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$，并且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$。

较高的车轮不离地（$R_2 \geq 0$）。把 $2R_2 \geq 0$ 乘以 $d/h > 0$，

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) + P\cos\alpha - W\sin\alpha \geq 0.$$

乘以 $\cos\beta > 0$ 并整理各项，

$$P(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \geq W(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta),$$

即

$$P\cos(\alpha-\beta)\geq W\sin(\alpha-\beta).$$

由于 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，我们有 $\cos(\alpha-\beta)>0$，所以可以除以它而无须把不等式（inequality）的方向倒转：

$$P\geq W\tan(\alpha-\beta).$$

较低的车轮不离地（$R_1\geq 0$）。同样地，由 $2R_1\geq 0$ 可得

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha+P\sin\alpha)-P\cos\alpha+W\sin\alpha\geq 0,$$

再乘以 $\cos\beta>0$，

$$P(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\leq W(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta),$$

即

$$P\cos(\alpha+\beta)\leq W\sin(\alpha+\beta).$$

只要 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$（题目给出的答案其实暗中假设了这一点，否则 $\tan(\alpha+\beta)$ 是负数或者没有定义），便有 $\cos(\alpha+\beta)>0$，相除后得

$$P\leq W\tan(\alpha+\beta).$$

若 $\alpha+\beta\geq\frac{\pi}{2}$，则当 $P\geq 0$ 时左边 ≤ 0，而右边是正数，所以指向斜面的水平推力无论多大，都不能令货车绕较高的车轮翻倒。

把两个条件合起来，货车不翻倒当且仅当

$$W\tan(\alpha-\beta)\leq P\leq W\tan(\alpha+\beta),$$

这就是所要求的结果。推力太小，货车会绕 A 向斜面下方翻倒；推力太大，它会绕 B 被推得向斜面上方翻倒。

验算

- *几何图像*。重量和 P 合成为通过 G 的单一个力，它与铅垂线成角 θ，其中 $\tan\theta=P/W$。当这个合力（resultant）通过车轮的接触点时，货车便处于即将翻倒的状态。直线 GA 与斜面的法线成角 β，而法线与铅垂线成角 α，所以合力在 $\theta=\alpha-\beta$ 时通过 A，在 $\theta=\alpha+\beta$ 时通过 B。这正好就是区间的两个端点。
- *没有斜坡*。取 $\alpha=0$，条件变成 $|P|\leq Wd/h$：这正是大家熟悉的条件，即平地上的箱子在高度 h 处受横向推力而不翻倒的条件。
- *数值*。取 $W=3$、$\alpha=0.4$、$d=1$、$h=1.5$，区间为 $-0.571\leq P\leq 4.551$。对 20 000 个随机配置直接检查 $R_1,R_2\geq 0$ 并与这个区间比对，结果完全吻合，而且在下端有 $R_2=0$，在上端有 $R_1=0$。

常见错误

- 绕车轮而不是绕 G 取力矩。这样做也行得通，但重量和 P 的力臂（moment arm）就变得很麻烦，正负号也容易出错。
- 忘记摩擦力对 G 有力矩。摩擦力作用于斜面上，在 G 下方距离 h 处，h 正是由此进入答案的。
- 没有检查 $\cos(\alpha \pm \beta)$ 的正负号就除以它，而不等式的方向正是由这个正负号决定的。

STEP 之外

车轮与地面之间的摩擦力是*静不定*（statically indeterminate）的：平衡条件只能确定 $F_1 + F_2$，永远不能分别确定 F_1 和 F_2，要知道两者如何分配，就需要一个描述轮胎如何变形的模型。工程师经常遇到这种情况，例如支承数目多于严格所需的结构。上面的几何验算，用的就是*合力作用线*（line of action of the resultant）和支承多边形（support polygon）的想法，步行机械人和叠起的积木的稳定性，背后也是同一个道理。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）仔细讲解了刚体静力学（statics）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。