详细解答

STEP I 2002，第 8 题

纯数学 · 复利贷款

STEP I 2002，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s1-q8

关键思路

先写下一年之内发生的事：债务先乘以因子 $1+\alpha$，然后减去还款额。把这个一步递推关系（recurrence）逐层展开，便可看出每笔还款 R_k 到第 n 年年底时“值”$(1+\alpha)^{n-k}R_k$，因为它令这么多的利息无从累积。其余的一切都只是等比级数（geometric series）。至于最后的近似值，用二项式定理（binomial theorem）展开 $1+\alpha$ 的幂，保留刚好足够的项即可。

解答

C_{n+1} 的一般公式

在第 k 年年底，加上利息后债务 C_k 变成 $(1+\alpha)C_k$，然后偿还 R_k。余下的就是第 $k+1$ 年年初的债务：

$$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k.$$

重复应用这条关系式，

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)C_n - R_n \\ &= (1+\alpha)^2 C_{n-1} - (1+\alpha)R_{n-1} - R_n \\ &\vdots \\ &= (1+\alpha)^n C_1 - (1+\alpha)^{n-1}R_1 - (1+\alpha)^{n-2}R_2 - \cdots - R_n, \end{aligned}$$

因此，由于 $C_1 = C$，

$$\boxed{C_{n+1} = (1+\alpha)^n C - \sum_{k=1}^{n}(1+\alpha)^{n-k}R_k}.$$

（要令这个论证严谨，可验证它在 $n=1$ 时成立，此时它说的是 $C_2=(1+\alpha)C-R_1$；并验证若它对 n 成立，则乘以 $1+\alpha$ 再减去 R_{n+1} 便得出 $n+1$ 的情况。）

还款额 $R_k=(1+\alpha)^k r$

在 N 年内还清贷款，即是 $C_{N+1}=0$。当 $R_k=(1+\alpha)^k r$ 时，和式中的每一项都相同：

$$(1+\alpha)^{N-k}R_k=(1+\alpha)^{N-k}(1+\alpha)^k r=(1+\alpha)^N r.$$

因此

$$0=C_{N+1}=(1+\alpha)^N C-N(1+\alpha)^N r=(1+\alpha)^N\,(C-Nr).$$

由于 $(1+\alpha)^N\neq 0$，我们得到 $C=Nr$，即 $r=C/N$，正是所求。

这个结果合乎情理：第 k 笔还款是“以今天的币值计”的 C/N，再加上 k 年的利息增长，所以你合共偿还的是本金（principal）C，另加恰好是它所生的利息。

等额还款 R

现在对每个 k 都有 $R_k=R$，而 $C_{N+1}=0$ 给出

$$(1+\alpha)^N C=R\sum_{k=1}^{N}(1+\alpha)^{N-k}=R(1+(1+\alpha)+\cdots+(1+\alpha)^{N-1}).$$

括号内是一个等比级数，首项为 1，公比为 $1+\alpha$，共 N 项，所以（因为 $\alpha>0$，公比不等于 1）它等于

$$\frac{(1+\alpha)^N-1}{(1+\alpha)-1}=\frac{(1+\alpha)^N-1}{\alpha}.$$

于是 $(1+\alpha)^N C=R\,\dfrac{(1+\alpha)^N-1}{\alpha}$，整理后得

$$\frac{R}{C}=\frac{\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N-1},$$

这就是所求的结果。

$\alpha=\frac{1}{50}$、$N=4$ 的情况

> ? **想一想** 二项展开式应该保留多少项？为甚么分子需要的项数比分母少？

分母 $(1+\alpha)^4-1$ 由 α 的一阶项开始，而分子 $\alpha(1+\alpha)^4$ 则是 α 乘以一个由 1 开始的式子。所以约去因子 α 之后，分子是 $(1+\alpha)^4$，分母是 $((1+\alpha)^4-1)/\alpha$。要令两者都准确至 α 的一阶，分子需要 $(1+\alpha)^4\approx 1+4\alpha$，但分母需要 $(1+\alpha)^4\approx 1+4\alpha+6\alpha^2$（除以 α 之后，$6\alpha^2$ 变成 6α）。因此

$$\frac{R}{C}=\frac{(1+\alpha)^4}{((1+\alpha)^4-1)/\alpha}=\frac{1+4\alpha+6\alpha^2+\ldots}{4+6\alpha+4\alpha^2+\alpha^3}\approx\frac{1+4\alpha}{4+6\alpha}.$$

代入 $\alpha = \frac{1}{50}$，

$$\frac{R}{C} \approx \frac{1+\frac{4}{50}}{4+\frac{6}{50}} = \frac{54}{206} = \frac{27}{103},$$

正是所求。我们舍去的项，相对大小约为 α^2，在这里只是百分之一的一小部分。

验算

- 当 $N = 1$ 时，公式给出 $R/C = 1+\alpha$：借入 C，连同一年的利息一并偿还。正确。
- 当 $\alpha \to 0$ 时，$(1+\alpha)^N - 1 \approx N\alpha$，所以 $R/C \to 1/N$：没有利息时，每年只需偿还 C/N。这亦与 $r = C/N$ 吻合。
- 准确值是 $R/C = \dfrac{6765201}{25760050} \approx 0.26262$，而 $27/103 \approx 0.26214$；两者相差约 0.2%。取 $R = 0.26262\,C$，把债务逐年推算下去，四年后（在舍入误差之内）再无欠款。

常见错误

- 弄错和式中的指数：R_k 是在第 k 年年底偿还的，所以它少计的利息是往后的 $n-k$ 年，而不是 $n-k+1$ 年。
- 在分母中也用 $(1+\alpha)^4 \approx 1+4\alpha$ 作近似：这样会得出 $R/C \approx 27/100$，是一个较粗略的答案，与题目所求不符。

STEP 之外

$\sum(1+\alpha)^{-k}R_k$ 这个量是各笔还款的现值（present value），而贷款刚好还清，正是还款的现值等于借款额之时；R 的公式就是标准的年金（annuity，即按揭）公式。像 $C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k$ 这样的递推关系是一阶线性差分方程（first-order linear difference equation），可说是微分方程（differential equation）$y' = \alpha y - R(t)$ 的离散版近亲，两者都可用同一个“积分因子”（integrating factor）的想法求解。如想多做一些这类把代数与建模（modelling）结合起来的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。