详细解答

STEP I 2002，第 7 题

纯数学 · 三角函数积分

STEP I 2002，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s1-q7

关键思路

单独来看，I 和 J 都不易处理，但两者之和与两者之差却都很好计算。把它们相加，分母（denominator）便出现在分子（numerator）上，于是被积函数（integrand）就是 1。把它们相减，分子上出现的是分母的导数（derivative），于是积分是一个对数（logarithm）。后面两个积分用的是同一技巧的较一般形式：把分子拆成分母的某个倍数，加上分母的导数的某个倍数。

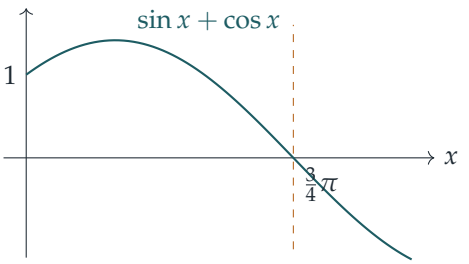
解答

主要结果

首先，为甚么要对 a 加上限制？我们可以写成

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right),$$

它在 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ 时为正，并在 $x = \frac{3}{4}\pi$ 处首次等于零。因此当 $0 \le a < \frac{3}{4}\pi$ 时，分母在整个 $[0, a]$ 上都是正数。这样两个积分都是普通的积分，而下面取对数的也是一个正数。



把两个积分相加，

$$I+J=\int_0^a \frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^a 1\,\mathrm{d}x=a.$$

把它们相减，

$$I-J=\int_0^a \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

分子 $\cos x-\sin x$ 正好是分母 $\sin x+\cos x$ 的导数，所以被积函数具有 $f'(x)/f(x)$ 的形式，其中在 $[0,a]$ 上 $f>0$。因此

$$I-J=\Big[\ln(\sin x+\cos x)\Big]_0^a=\ln(\sin a+\cos a)-\ln 1=\ln(\sin a+\cos a).$$

把两个结果相加，得

$$2I=a+\ln(\sin a+\cos a),$$

这正是所要求的结果。（把两者相减，还可以顺带得到 $2J=a-\ln(\sin a+\cos a)$。）

第 (i) 部分

由于 $p,q>0$，而 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上都非负，且不会同时为零，所以分母 $D(x)=p\sin x+q\cos x$ 在该区间上是正数。它的导数是 $D'(x)=p\cos x-q\sin x$。

> **想一想** 当分母带有系数 p 和 q 时，“考虑 $I+J$ 与 $I-J$”这个做法应该怎样推广？

先前取和与差之所以奏效，是因为两个分子相加得出分母，相减则得出分母的导数。所以现在我们要找常数 A 和 B，使得

$$\cos x=A\,(p\sin x+q\cos x)+B\,(p\cos x-q\sin x)\qquad \text{对所有}x.$$

比较 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的系数：

$$pA-qB=0,\qquad qA+pB=1.$$

由第一式得 $B=pA/q$；代入第二式得 $qA+p^2A/q=1$，所以

$$A=\frac{q}{p^2+q^2},\qquad B=\frac{p}{p^2+q^2}.$$

现在积分拆成容易的一部分和对数的一部分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{p\sin x+q\cos x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi/2}\left(A+B\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}A+B\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}A+B\ln\frac{p}{q},\end{aligned}$$

其中用到 $D(\frac{\pi}{2})=p$ 和 $D(0)=q$，两者皆为正数。因此

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{p\sin x+q\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{\frac{1}{2}\pi q+p\ln(p/q)}{p^2+q^2}.$$

第 (ii) 部分

现在分母是 $D(x) = 3\sin x + 4\cos x + 25$，而 $D'(x) = 3\cos x - 4\sin x$。分母是正数，因为 $|3\sin x + 4\cos x| \le 5 < 25$。$D$ 中有常数 25，表示我们还须令常数项相符，所以要找 A 和 B，使得

$$\cos x + 4 = A\,(3\sin x + 4\cos x + 25) + B\,(3\cos x - 4\sin x).$$

比较系数：

$$\sin x:\ 3A - 4B = 0, \qquad \cos x:\ 4A + 3B = 1, \qquad \text{常数项}:\ 25A = 4.$$

由前两式得 $A = \frac{4}{25}$ 和 $B = \frac{3}{25}$，而常数项的方程 $25 \cdot \frac{4}{25} = 4$ 也同样成立。三条方程只有两个未知数，这并非必然成立：分子中的“$+4$”是特意选来令它成立的。所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 25}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{25}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{25}\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29},\end{aligned}$$

因为 $D(\frac{\pi}{2}) = 3 + 25 = 28$ 而 $D(0) = 4 + 25 = 29$。

验算

- 取 $p = q = 1$ 时，第 (i) 部分应与主要结果在 $a = \frac{\pi}{2}$ 时的情况一致；后者给出 $2I = \frac{\pi}{2} + \ln 1$，所以 $I = \frac{\pi}{4}$。公式给出 $\frac{\pi/2+0}{2} = \frac{\pi}{4}$。两者吻合。
- 当 $a \to \frac{3}{4}\pi$ 时，$\ln(\sin a + \cos a) \to -\infty$。这与以下事实相符：在分母快要变成零之前，$I$ 的被积函数是绝对值很大的负数，因为在那里 $\cos x < 0$。
- 以数值计算，第 (ii) 部分是 $\frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29} \approx 0.247116$，而对该积分使用辛普森法则（Simpson's rule）所得的结果与它吻合至小数点后十二位。主要结果和第 (i) 部分也分别对 200 个随机的 a 值，以及随机的 p 和 q 值，与数值积分（quadrature）的结果吻合。

常见错误

- 在第 (i) 部分得出 $\ln(q/p)$ 而不是 $\ln(p/q)$。在上限 $\frac{\pi}{2}$ 处，留下来的是 sin 那一项，所以得出 p。
- 在第 (ii) 部分忘记常数项，只比较 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的系数。这样做碰巧行得通，但你应该加以验证，而不是假定它成立。

STEP 之外

把分子写成“A 乘以分母，加上 B 乘以分母的导数”，其实是一小段线性代数（linear algebra）。函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 张成一个二维空间，而只要 $p^2 + q^2 \neq 0$，D 和 D' 就构成这个空间的另一组基（basis）。同一个想法，即找出合适的基来展开，也是部分分式（partial fractions）和求解微分方程（differential equations）的待定系数法（method of undetermined coefficients）背后的原理，你会在大学一年级的数学方法课程中学到这些内容。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中还有更多可以用这类对称技巧解决的积分。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。