详细解答

STEP I 2002，第 6 题

纯数学 · 角锥的几何

STEP I 2002，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

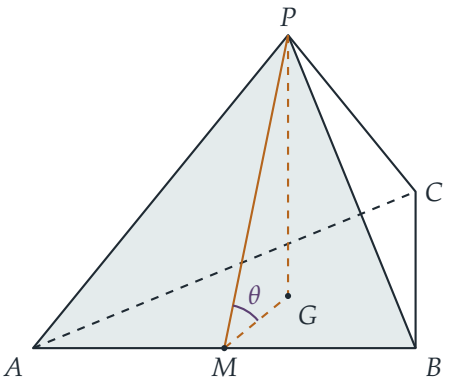
step.maths.org/questions/02-s1-q6

关键思路

根据对称性，顶点位于等边底面中心的正上方，因此只需用一次毕氏定理（Pythagoras' theorem）便可求得高。知道体积之后，我们根本不必直接求新的高：无论哪一个面放在地上，体积都是一样的，所以 $V = \frac{1}{3} \times (\text{新底面的面积}) \times h$。最后一部分所求的角，是两个面沿公共棱所成的夹角；要看清楚这个角，最简洁的方法是考虑通过顶点并垂直于该棱的截面（cross-section）。

解答

把底面记为 ABC，边长为 a，顶点记为 P，且 $PA = PB = PC = b$。设 G 为 ABC 的中心，M 为 AB 的中点。



体积

设 H 为 P 在底面之上的高度，F 为由 P 所作垂线的垂足。直角三角形 PFA、PFB、PFC 有公共边 $PF = H$，而斜边均为 b，所以

$$FA = FB = FC = \sqrt{b^2 - H^2}.$$

因此 F 与三个顶点等距：它是 ABC 的外心（circumcentre），而等边三角形的外心就是其中心 G。ABC 的中线（median）长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，而 G 位于中线上由顶点起计三分之二的位置，所以 $GA = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$。在三角形 PGA 中运用毕氏定理，得

$$H^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

底面的面积为 $\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}a^2\left(3b^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

正是所要求的结果。（这种形状的棱锥只在 $3b^2 > a^2$ 时才存在，而这正好是上式为正实数的条件。）

新的高

现在把面 PAB 放在地上。它是等腰三角形，$PA = PB = b$ 而 $AB = a$，所以 PM 垂直于 AB；在三角形 PMA 中运用毕氏定理，得

$$PM^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}, \qquad \text{面积}PAB = \frac{1}{2}a\cdot PM = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

想一想 要求 h，我们真的需要找出新的最高顶点的位置吗?

不需要。立体本身没有改变，所以它的体积仍然是 V；而体积公式对任何一个面作为底面都成立，只要高是垂直于该面量度的。所以

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}\cdot h.$$

与第一部分的结果比较，

$$\frac{a}{12}\sqrt{4b^2 - a^2}\,h = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

两边平方得

$$h^2 = \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2 - a^2},$$

正是所要求的结果。这里 $4b^2 - a^2 > 0$，因为 $4b^2 > 3b^2 > a^2$。

等边面的倾角

在新的位置，地面就是 PAB 所在的平面，而等边面 ABC 与它沿棱 AB 相交。两个平面之间的夹角，是指在两个平面上各取一条直线，于同一点垂直于公共棱，这两条直线所成的角。在 M 点，面 PAB 上的直线 MP 垂直于 AB（因为 PAB 是等腰三角形），面 ABC 上的直线 MC 亦垂直于 AB（因为 ABC 是等边三角形），而且 G 在 MC 上。所以所求的角是 $\theta = \angle PMC = \angle PMG$。

三角形 PMG 在 G 处为直角，因为 PG 垂直于整个底面。此外，GM 是中线的三分之一，$GM = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$。因此

$$\tan\theta = \frac{PG}{GM} = \frac{\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{a},$$

所以等边三角形与水平面之间的夹角为

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{a}\right).$$

这个角是锐角，因为 G 位于底面之内，所以它确实是两个平面之间的夹角，而不是其补角。

另一个等价的做法是利用新的高：顶点 C 在地面之上的高度为 h，而沿着该面量度，它与棱 AB 的距离为 $MC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $\sin\theta = h\big/\frac{\sqrt{3}}{2}a$，由此得

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}},$$

与上面 $\tan\theta$ 的值吻合。

验算

对于正四面体（regular tetrahedron），$a = b = 1$：公式给出 $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$，$h^2 = \frac{2}{3}$（与原来的高相同，根据对称性亦必然如此），以及 $\cos\theta = \frac{1}{3}$，即大家熟悉的正四面体二面角（dihedral angle）$\theta \approx 70.53^\circ$。当 $b \to a/\sqrt{3}$ 时，棱锥变得扁平，$\theta \to 0$；当 $b \to \infty$ 时，它变成又高又尖的锥体，$\theta \to 90^\circ$。我们亦用坐标为 20,000 组随机数对 (a, b) 建构了这个棱锥，并以三重积计算 V，以 C 到平面 PAB 的距离计算 h，以法向量计算 θ；三者均与公式吻合，误差约为 10^{-13}。例如 $a = 2$、$b = 3$ 给出 $h \approx 1.6956$ 及 $\theta \approx 78.22^\circ$。

常见错误

- 把 GA 当作中线的一半，或在需要用外接圆半径（circumradius）$\frac{a}{\sqrt{3}}$ 的地方用了内切圆半径（inradius）$\frac{a}{2\sqrt{3}}$（在最后一部分则刚好相反）。

► 量度该面与地面之间的夹角时，用了一条不垂直于公共棱的直线，例如 AC 或 PC。

STEP 之外

以不同的面作底来计算同一个体积，让我们初次窥见这样一个想法：体积并不取决于我们怎样切割立体或怎样摆放它。在大学一年级的课程中，四面体的体积会写成 $\frac{1}{6}|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$，即一个纯量三重积（scalar triple product，亦即一个 3×3 行列式（determinant）），而两个面之间的夹角就是它们的法向量（normal vector）之间的夹角，我们的数值验算正是这样做的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把行列式作为体积来阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。