详细解答

STEP I 2002，第 5 题

纯数学 · 多项式的整数根

STEP I 2002，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s1-q5

关键思路

写成一次因式（linear factor）乘积的多项式（polynomial），在特殊点上很容易求值：代入 $x = 0$、$x = 1$ 或 $x = -1$，因式分解后的形式就变成 k_i、$k_i + 1$ 或 $k_i - 1$ 的乘积，而展开后的形式则给出系数（coefficient）之和。对于题中的四次多项式（quartic），这些值都是固定的整数，而根（root）是整数就意味着每个 $k_i \pm 1$ 都必须是某个已知数的因数（divisor）。把这些数分解成质因数之后，可供选择的余地就所剩无几。

解答

三个恒等式

由于 $f(x)$ 的两个表达式是同一个多项式，它们在 x 的每一个值上都相等。

代入 $x = 0$：展开式给出 $f(0) = a_n$，因为其余各项都含有因子 x。因式分解后的形式给出 $f(0) = k_1 k_2 \cdots k_n$。因此

$$k_1 k_2 \cdots k_n = a_n.$$

代入 $x = 1$：x 的每个幂都变成 1，所以展开式给出 $f(1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，而因式分解后的形式给出 $(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)$。因此

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

正如所求。

代入 $x = -1$：因式分解后的形式给出 $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)$。在展开式中，$a_j x^{n-j}$ 一项变成 $(-1)^{n-j} a_j = (-1)^n (-1)^j a_j$（这里用到 $(-1)^{-j} = (-1)^j$），所以

$$(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1) = (-1)^n (1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n).$$

当 n 为偶数时，这就是 $1-a_1+a_2-\cdots+a_n$；当 n 为奇数时，每个符号都要反转。

四次多项式

把这个四次多项式写成 $f(x) = (x+k_1)(x+k_2)(x+k_3)(x+k_4)$，于是它的根是 $-k_1,\ldots,-k_4$，而且都是整数。取 $n=4$ 应用上述恒等式：

$$k_1k_2k_3k_4 = 576 = 2^6\cdot 3^2,$$
$$(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)(k_4+1) = 1+22+172+552+576 = 1323 = 3^3\cdot 7^2,$$
$$(k_1-1)(k_2-1)(k_3-1)(k_4-1) = 1-22+172-552+576 = 175 = 5^2\cdot 7.$$

每个 k_i 都至少是 2。所有系数都是正数，所以对每个 $x\geq 0$ 都有 $f(x)>0$；因此每个根都是负数，每个 k_i 都是正整数。此外，没有任何 k_i 等于 1，否则第三个乘积会是 0 而不是 175。所以对每个 i 都有 $k_i\geq 2$，而 k_i-1 和 k_i+1 全都是正整数。

? **想一想** 怎样把三个乘积化为一张简短的清单，列出 k_i 的可能值?

每个 k_i-1 都是 175 的正因数，每个 k_i+1 都是 1323 的正因数。175 的因数是 $1,5,7,25,35,175$，由此得

$$k_i\in\{2,6,8,26,36,176\},\qquad k_i+1\in\{3,7,9,27,37,177\}.$$

在 k_i+1 的这些值当中，只有 $3,7,9,27$ 能整除 $1323=3^3\cdot 7^2$（因为 37 是质数，而 $177=3\cdot 59$）。所以每个 k_i 都是 $2,6,8,26$ 其中之一，每个 k_i+1 都是 $3,7,9,27$ 其中之一。

现在看乘积 $\prod(k_i+1)=3^3\cdot 7^2$。

- 因子 7^2 只能来自等于 7 的因子，所以 k_i+1 当中恰好有两个等于 7：有两个 k_i 是 6。
- 另外两个因子是取自 $\{3,9,27\}$ 的 3 的幂，乘积为 $3^3=27$。两者都至少是 3，所以不可能取 27（否则另一个就要是 1），唯一的选择是 3×9。所以余下的 k_i 是 2 和 8。

于是 $\{k_1,k_2,k_3,k_4\}=\{2,6,6,8\}$。用第一个乘积验证：$2\cdot 6\cdot 6\cdot 8=576$，正如所求。展开亦可确认：

$$(x+2)(x+8)=x^2+10x+16,\qquad (x+6)^2=x^2+12x+36,$$

以及

$$(x^2+10x+16)(x^2+12x+36)=x^4+22x^3+172x^2+552x+576.$$

所以各根是

$$x=-2,\quad x=-6\text{（重根）},\quad x=-8.$$

验算

- 各 k_i 之和是 $2+6+6+8=22$，与 x^3 的系数吻合。
- $f(-6)=1296-4752+6192-3312+576=0$，而 $f'(x)=4x^3+66x^2+344x+552$ 在 $x=-6$ 处同样等于零，确认 -6 是二重根。
- 用数值快速检验这些恒等式：对 $f(x)=(x+2)(x-3)=x^2-x-6$，我们得到 $(2-1)(-3-1)=-4$ 和 $1-(-1)+(-6)=-4$。

常见错误

- 在 $x=-1$ 的结果中弄错符号：当 n 为奇数时，因子 $(-1)^n$ 不能忽略。
- 忘记重根是容许的：一旦在 1323 中见到 7^2，就必定有两个 k_i 相等。
- 没有先证明每个 $k_i \geq 2$ 就只列出正因数；正是这一步保证了所有 $k_i \pm 1$ 都是正数。

STEP 之外

这里的恒等式是韦达定理（Vieta's formulae）的特殊情况；韦达定理把多项式的系数表示为其根的基本对称函数（elementary symmetric functions）。至于因数的论证，则与有理根定理（rational root theorem）一脉相承，也与高斯（Gauss）关于整系数多项式因式分解的引理（Gauss's lemma）相近，后者你会在环（ring）论的入门课程中遇到。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）对这些想法有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。