详细解答

STEP I 2002，第 4 题

纯数学 · 切线与不等式

> **STEP I 2002，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q4

关键思路

一条通过 $(0,1)$ 并在较远处与曲线相切的直线，在这两点之间必定位于曲线的下方，因为曲线在该处是凹的（concave），其后才变得平缓。直线下方的区域是一个梯形（trapezium），把它绕 y 轴旋转会得到一个圆柱体和一个圆锥体，所以毋须用微积分也能轻易求出它的面积和体积。把它们与曲线下方的准确面积和体积比较，便得到那两个不等式。

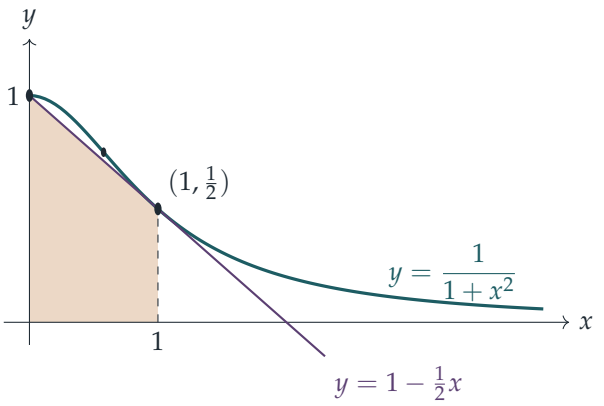
解答

略图

设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$。则 $f(0)=1$，$f(x)>0$，而且当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$，所以 x 轴是渐近线（asymptote）。求导得

$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\qquad f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

所以 $f'(0)=0$（曲线在 $(0,1)$ 处以水平方向出发），而当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$，故曲线一直递减。此外，当 $0\le x<1/\sqrt{3}$ 时 $f''(x)<0$，当 $x>1/\sqrt{3}$ 时 $f''(x)>0$，所以在 $(1/\sqrt{3},\frac{3}{4})$ 有一个拐点（point of inflection）：曲线在 y 轴附近是凹的（向下弯），在较远处则是凸的（convex）。



阴影部分的梯形是 $0 \le x \le 1$ 时直线下方的区域；它位于曲线下方的区域之内。

直线

直线通过 $(0, f(0)) = (0,1)$，所以它的方程是 $y = 1 + mx$，其中 m 是某个斜率（gradient）。假设它在 $x = a > 0$ 处与曲线相切。在该处必须满足两个条件。

它与曲线相交：$1 + ma = \dfrac{1}{1+a^2}$，所以 $ma = -\dfrac{a^2}{1+a^2}$，而由于 $a \neq 0$，

$$m = -\frac{a}{1+a^2}.$$

它的斜率与曲线的斜率相同：$m = f'(a) = -\dfrac{2a}{(1+a^2)^2}$。

令两式相等，再除以 $-a/(1+a^2)$（因为 $a > 0$，这样做是容许的），得 $1 = \dfrac{2}{1+a^2}$，所以 $a^2 = 1$，而由于 $a > 0$，故 $a = 1$。于是 $m = -\frac{1}{2}$，直线是

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}x,$$

它在 $(1, \frac{1}{2})$ 处与曲线相切。

再无其他交点

把直线减去曲线：

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(2-x)(1+x^2) - 2}{2(1+x^2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{2(1+x^2)} = -\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

这个式子只在 $x = 0$ 或 $x = 1$ 时等于零。所以直线与曲线相交于 $x = 0$ 和切点 $x = 1$（重因式 $(x-1)^2$ 正是相切在代数上的标志），此外再无其他交点：在 $x \ge 0$ 时没有，事实上在 x 为负数时也没有。

我们还可以从中读出下一步需要的结果。当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时，这个式子严格小于零，所以

$$0 < 1 - \tfrac{1}{2}x < \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{当} 0 < x < 1. \tag{$*$}$$

（左边的不等式成立，是因为在 $[0,1]$ 上 $1 - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$。）所以在 $[0,1]$ 上，除了端点之外，直线严格位于曲线下方，正如略图所示。

$\pi > 3$

把 $(*)$ 在 $[0,1]$ 上积分。两个函数都是连续的，而且在开区间上曲线严格位于直线上方，所以积分之后不等式仍然是严格不等式：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

左边是 $\frac{\pi}{4}$（即 $[\arctan x]_0^1$）。右边是阴影梯形的面积，梯形的两条平行边长为 1 和 $\frac{1}{2}$，宽为 1，所以面积是 $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$。因此 $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$，即

$$\pi > 3.$$

$\ln 2 > 2/3$

现在把同样的两个区域（$0 \leq x \leq 1$）绕 y 轴旋转 2π。根据 $(*)$，梯形位于曲线下方的区域之内，所以它的旋转体（solid of revolution）位于另一个旋转体之内，体积也较小。

想一想 如果曲线是以 x 表示 y 的形式给出，我们怎样求绕 y 轴旋转的旋转体体积?

使用圆柱壳法（cylindrical shells）：位于 x 处、宽度为 δx、高度为 y 的窄条，旋转后扫出一个体积约为 $2\pi x\, y\, \delta x$ 的薄壳，所以体积是 $\int_0^1 2\pi x\, y\, \mathrm{d}x$。（另一个方法是沿水平方向切片；见“验算”。）

对于曲线，

$$V_{\text{curve}} = \int_0^1 \frac{2\pi x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi[\ln(1+x^2)]_0^1 = \pi \ln 2,$$

因为分子 $2x$ 是分母的导数。

对于直线，旋转体是一个半径为 1、高为 $\frac{1}{2}$ 的圆柱体（来自梯形在 $y = \frac{1}{2}$ 以下的部分），上面再加一个半径为 1、高为 $\frac{1}{2}$ 的圆锥体（来自其上方的三角形）。所以

$$V_{\text{line}} = \pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

用圆柱壳法验算：$\int_0^1 2\pi x(1 - \frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = 2\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{2\pi}{3}$。

被积函数 $2\pi x(\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x}{2})$ 是连续的，在 $[0,1]$ 上非负，而且根据 $(*)$ 在 $(0,1)$ 上严格为正，所以 $V_{\text{curve}} > V_{\text{line}}$：

$$\pi \ln 2 > \frac{2\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad \ln 2 > \frac{2}{3},$$

这正是所要证明的。

验算

- 以数值计算，$\pi/4 \approx 0.7854 > 0.75$，$\ln 2 \approx 0.6931 > 0.6667$，所以两个不等式都成立，而且两者都不算宽松。
- 改为沿水平方向切片：当 $\frac{1}{2} \le y \le 1$ 时，曲线满足 $x^2 = \frac{1}{y} - 1$，所以体积是圆柱体的 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}$ 加上 $\int_{1/2}^{1} \pi\left(\frac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$，同样得到 $\pi \ln 2$。
- 快速检验因式分解：在 $x=2$ 时，直线给出 0，曲线给出 $\frac{1}{5}$，两者相差 $-\frac{1}{5}$；公式给出 $-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{5}$。

常见错误

- 求出一般点上的切线，却忘记了切线须通过 $(0,1)$ 这个条件（或者反过来）：两个条件都要用上，才能确定 a。
- 止步于“$\ge$”：要得到严格不等式，直线必须在某个区间上严格位于曲线下方，而这正是因式 $x(x-1)^2$ 所提供的。
- 误把区域绕 x 轴旋转，这样会得到 $\int \pi y^2\,\mathrm{d}x$ 和不同的数值。

STEP 之外

这个论证是一个比较原理（comparison principle）：如果在某个区间上 $g \le h$，在某处有严格不等式成立，而且两者都连续，那么 $\int g < \int h$。把“在某处严格成立”说得精确，是大学第一门分析课程中的典型习题，在那里积分是通过上和与下和（upper and lower sums）来定义的。以简单图形的面积来估计 π 的上下界，可以追溯至阿基米德（Archimedes），而这道题还有精密得多的版本（例如 $\int_0^1 x^4(1-x)^4/(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$），值得查阅一下。至于分析方面，可以试读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。