详细解答

STEP I 2002，第 3 题

纯数学 · 以微积分证明不等式

> **STEP I 2002，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q3

关键思路

把两个平方根记作 $\sqrt{P}$ 和 $\sqrt{Q}$。根号下的两个量关系密切：$P+Q=a^2+b^2$ 是常数，而且它们的导数（derivative）大小相等、正负相反。因此 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ 可以干净利落地因式分解（factorise），其正负只由一个三角因子决定。只要知道 y 的最大值和最小值，那个双重不等式（double inequality）不过就是“最小值 $\le y \le$ 最大值”，而第一部分则告诉我们两端的大小次序正确。

解答

第一个不等式

展开得

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\ge 0,$$

所以 $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$，等号成立当且仅当 $a=b$。

驻点

设 $c=\cos\theta$，$s=\sin\theta$，并且

$$P=a^2c^2+b^2s^2,\qquad Q=a^2s^2+b^2c^2,\qquad y=\sqrt{P}+\sqrt{Q}.$$

先看两个特殊情况。若 $a^2=b^2$，则对每一个 θ 都有 $P=Q=a^2$，所以 $y=2|a|$ 是常数，每一点都（平凡地）是驻点（stationary point）；这个情况暂且搁下。若 $a=0$ 或 $b=0$（但不同时为零），则 P 或 Q 会在某些 θ 处等于零，而 y 在该处不可微（not differentiable）；这个情况留待最后处理。所以现在先假设 $ab\ne 0$ 且 $a^2\ne b^2$。于是 $P\ge \min(a^2,b^2)(c^2+s^2)>0$，

同理 $Q > 0$，所以 y 处处可微。

求导得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} = -2a^2cs + 2b^2sc = (b^2 - a^2)\sin 2\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} = (a^2 - b^2)\sin 2\theta.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{P}} - \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{Q}} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta\,(\sqrt{Q} - \sqrt{P})}{2\sqrt{PQ}}.$$

要看出 $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$ 的正负，可以把它有理化（rationalise）：

$$\sqrt{Q} - \sqrt{P} = \frac{Q - P}{\sqrt{Q} + \sqrt{P}}, \qquad Q - P = (a^2 - b^2)(s^2 - c^2) = (b^2 - a^2)\cos 2\theta.$$

代入上式，并利用 $2\sin 2\theta\cos 2\theta = \sin 4\theta$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(a^2 - b^2)^2\,\sin 4\theta}{4\sqrt{PQ}\,(\sqrt{P} + \sqrt{Q})}.$$

想一想 为甚么值得花工夫把 $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$ 有理化?

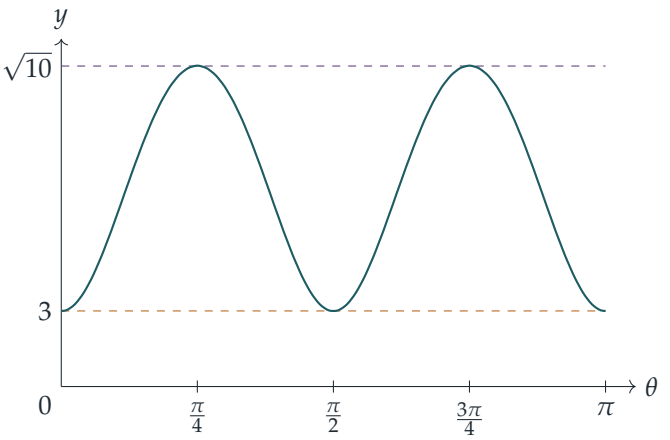
因为这样一来，除了 $\sin 4\theta$ 之外，其余各项一眼就看得出是正数：$(a^2 - b^2)^2 > 0$，而 P、Q 都是正数。所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ 的正负与 $\sin 4\theta$ 完全相同，这既告诉我们驻点在哪里，也告诉我们它们属于哪一类。

驻点出现在 $\sin 4\theta = 0$ 之处，即 $\theta = \frac{1}{4}n\pi$，其中 n 为整数。

- 当 n 为偶数时，$\theta = \frac{1}{2}k\pi$，所以 $\{c^2, s^2\} = \{1, 0\}$，$\{P, Q\} = \{a^2, b^2\}$。此时 $y = |a| + |b|$（记住 $\sqrt{a^2} = |a|$）。
- 当 n 为奇数时，$\theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$，所以 $c^2 = s^2 = \frac{1}{2}$，$P = Q = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$。此时 $y = 2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$。

驻点的性质。当 θ 递增经过 $\frac{1}{2}k\pi$ 时，$\sin 4\theta$ 由负变正，所以 y 由递减转为递增：这些点是**极小点（minima）**。当 θ 递增经过 $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ 时，$\sin 4\theta$ 由正变负，所以这些点是**极大点（maxima）**。

下图显示 $a = 2$、$b = 1$ 的情况，纵轴的比例经过拉长：y 在 3 与 $\sqrt{10} \approx 3.162$ 之间振荡，周期（period）为 $\frac{1}{2}\pi$。



最后的不等式

把 θ 换成 $\theta+\frac{1}{2}\pi$，c^2 与 s^2 便会对调，于是 P 与 Q 也对调，所以 y 的周期为 $\frac{1}{2}\pi$。在一个周期 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上，y 在 $[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上递增，在 $[\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 上递减（由 $\sin 4\theta$ 的正负可知），所以它的最小值是 $|a|+|b|$，在两个端点取得；最大值是 $\sqrt{2a^2+2b^2}$，在 $\frac{1}{4}\pi$ 取得。根据周期性，这两个值就是对所有 θ 而言的最小值和最大值，所以

$$|a|+|b| \;\le\; y \;\le\; \sqrt{2a^2+2b^2}.$$

这两个界并无矛盾：把第一部分的结果应用于 $|a|$ 和 $|b|$，得 $(|a|+|b|)^2 \le 2a^2+2b^2$，所以下界确实不会超过上界。

先前搁下的情况。若 $a^2=b^2$，则 $y=2|a|$，而 $|a|+|b|=2|a|$，$\sqrt{2a^2+2b^2}=\sqrt{4a^2}=2|a|$，所以不等式处处以等号成立。若 $b=0$，则 $y=|a|\big(|\cos\theta|+|\sin\theta|\big)$。由于每一项都不超过 1，故 $|\cos\theta|+|\sin\theta| \ge \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，而由第一部分可知 $(|\cos\theta|+|\sin\theta|)^2 \le 2$；所以 $|a| \le y \le \sqrt{2}\,|a|$，这正是所求的不等式。$a=0$ 的情况相同，只需把 a 与 b 对调；而 $a=b=0$ 的情况是平凡的。这就证明了结果对所有 a、b 和 θ 都成立。 ■

验算

- 取 $a=2$、$b=1$：$y(0)=2+1=3$，$y(\frac{1}{4}\pi)=2\sqrt{5/2}=\sqrt{10}\approx 3.1623$；以数值方法对大量 θ 值扫描 y，结果都落在这两个值之间。
- 导数公式与 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ 的有限差分（finite-difference）估计值相符，在随机选取的 a、b、θ 下误差约为 10^{-9}。
- 当 $a=b$ 时，两个界都退化为 $2|a|$，与 y 为常数的情况吻合。

常见错误

- 写成 $\sqrt{a^2} = a$：最小值是 $|a| + |b|$，这正是答案中出现绝对值（modulus）的原因。
- 只做到 $\sin 2\theta = 0$ 就停下来，漏掉了位于 $\frac{1}{4}\pi$ 的奇数倍之处的驻点，在那里 $\sqrt{P} = \sqrt{Q}$。
- 毫无理由就断定某些点是极大点或极小点；利用 $\sin 4\theta$ 的正负，一行就能给出理由。

STEP 之外

从几何上看，$\sqrt{P}$ 是椭圆（ellipse）$x = a\cos\phi$，$y = b\sin\phi$ 的中心到椭圆上某一点的距离，而 $\sqrt{Q}$ 是中心到参数再转四分之一圈之后那一点的距离，所以这道题探讨的是这两条“共轭”半径如何摊分固定的总和 $a^2 + b^2$。这两个界同时也是向量 (a, b) 的 ℓ^1 范数（norm）和（经缩放的）ℓ^2 范数，而像这样比较范数，是大学一年级分析（analysis）和线性代数（linear algebra）中的常用工具。想进一步了解如何利用导数证明不等式，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。