详细解答

STEP I 2002，第 2 题

纯数学 · 曲线描绘

> **STEP I 2002，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q2

关键思路

多项式 $x^m(x-1)^n$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处为零，所以曲线在两者之间必定要转向。用乘积法则（product rule）求导，并且把所有公因式（*common factor*）都提出来：导数（derivative）于是分解成几个简单的部分，各部分的正负号一目了然。整个草图由奇偶性（parity）决定：某个幂是偶数还是奇数，决定了曲线是与轴相切还是穿过轴，也决定了曲线在轴的哪一侧。

解答

驻点

由乘积法则，

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[m(x-1)+nx] \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[(m+n)x-m]. \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{f}'(x)=0$ 当且仅当 $x=0$、$x=1$ 或

$$x = x_0 = \frac{m}{m+n}.$$

由于 $m,n>0$，我们有 $0<m<m+n$，所以 $0<x_0<1$。这就是所求的驻点（stationary point）。（由于 $m,n\geq 2$，幂 $m-1$ 和 $n-1$ 都至少是 1，所以 $x=0$ 和 $x=1$ 也是驻点。画草图时会用到它们。）

驻点的性质

把导数写成 $\mathrm{f}'(x) = g(x)\,h(x)$，其中 $g(x) = x^{m-1}(x-1)^{n-1}$，$h(x) = (m+n)x - m$。那么

$$\mathrm{f}''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = g'(x)h(x) + (m+n)g(x).$$

> ? **想一想** 我们真的需要把 g 完整地求导吗?

不需要。在 x_0 处我们有 $h(x_0) = 0$，所以无论 g' 是甚么，第一项都会消失：

$$\mathrm{f}''(x_0) = (m+n)\,x_0^{m-1}\,(x_0-1)^{n-1}.$$

这里 $m+n > 0$，$x_0^{m-1} > 0$，但 $x_0 - 1 < 0$。所以 $\mathrm{f}''(x_0)$ 不为零，其正负号与 $(-1)^{n-1}$ 相同：

- 若 n 是偶数，则 $n-1$ 是奇数，$\mathrm{f}''(x_0) < 0$，x_0 是**极大点（maximum）**；
- 若 n 是奇数，则 $n-1$ 是偶数，$\mathrm{f}''(x_0) > 0$，x_0 是**极小点（minimum）**。

因为 $\mathrm{f}''(x_0) \neq 0$，二阶导数判别法（second-derivative test）可以下定论。这正是我们要证明的。

草图

四种情况由 m 和 n 的奇偶性决定。要画出每一种情况，我们先整理以下事实。

*f 的正负号。*当 $x > 1$ 时，两个因式都是正的，所以 $\mathrm{f} > 0$。当 $0 < x < 1$ 时，$x^m > 0$，而 $(x-1)^n$ 的正负号与 $(-1)^n$ 相同。当 $x < 0$ 时，正负号是 $(-1)^m(-1)^n = (-1)^{m+n}$。

*在根（root）附近的表现。*在 $x = 0$ 附近，我们有 $\mathrm{f}(x) \approx (-1)^n x^m$。若 m 是偶数，f 在 0 的两侧保持同号，所以曲线在该处与轴相切（一个转向点（turning point））。若 m 是奇数，f 变号，又因为 $\mathrm{f}'(0) = 0$，曲线会水平地穿过轴（一个驻拐点（stationary point of inflection））。把同样的推理用于 n，便得到 $x = 1$ 处的情况。

*两端。*当 $|x|$ 很大时，$\mathrm{f}(x)$ 的表现与 x^{m+n} 相似，所以当 $x \to +\infty$ 时 $\mathrm{f} \to +\infty$。当 $x \to -\infty$ 时，若 $m+n$ 是偶数则 $\mathrm{f} \to +\infty$，若 $m+n$ 是奇数则 $\mathrm{f} \to -\infty$。

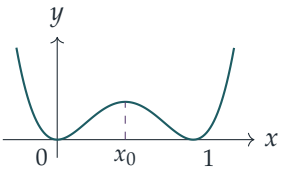
*没有其他驻点。*驻点只有 $x = 0$、x_0 和 $x = 1$。

综合以上各点：

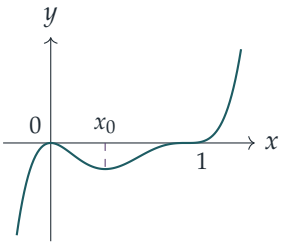
- **m 为偶数，n 为偶数：**处处皆有 $\mathrm{f} \geq 0$。在 0 和 1 处有位于轴上的极小点，在 x_0 处有一个极大点：呈 W 形。
- **m 为偶数，n 为奇数：**曲线由 $-\infty$ 上升，在 0 处从下方与轴相切（一个极大点），下降至 x_0 处的极小点，然后上升，经过 1 处的驻拐点，一直升向 $+\infty$。

- m **为奇数，n 为偶数：**曲线由 $-\infty$ 上升，经过 0 处的驻拐点，到达 x_0 处的极大点，下降至 1 处与轴相切（一个极小点），然后升向 $+\infty$。
- m **为奇数，n 为奇数：**曲线由 $+\infty$ 下降，经过 0 处的驻拐点，到达 x_0 处的极小点，再回升经过 1 处的驻拐点，一直升向 $+\infty$。

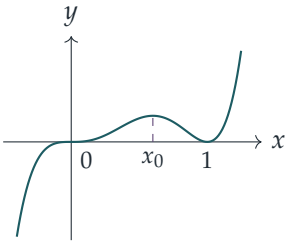
以下草图采用最小的情况 $(m,n) = (2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$，每幅图各有自己的纵轴比例。在 x_0 处的值都很小：分别是 $\frac{1}{16}$、$-\frac{108}{3125}$、$\frac{108}{3125}$ 和 $-\frac{1}{64}$。



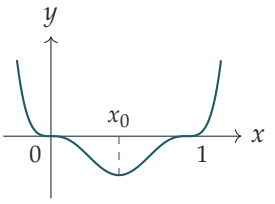
m 为偶数，n 为偶数



m 为偶数，n 为奇数



m 为奇数，n 为偶数



m 为奇数，n 为奇数

验算

- 取 $m = n = 2$：$\mathrm{f}(x) = \big(x(x-1)\big)^2$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称，而 $x_0 = \frac{1}{2}$ 确实是极大点，其值为 $\frac{1}{16}$。
- 代换 $x \mapsto 1-x$ 把 $x^m(x-1)^n$ 变成 $(-1)^{m+n}x^n(x-1)^m$。所以把 m 和 n 对调，相当于把图像沿 $x = \frac{1}{2}$ 反射（若 $m+n$ 是奇数，还要再沿 x 轴反射）。这就是两幅奇偶性相异的草图互为镜像的原因。
- 我们把 f' 与数值导数作了比对，又把 $\mathrm{f}''(x_0)$ 的正负号与有限差分（finite difference）作了比对，范围涵盖所有 $2 \le m,n \le 8$。例如当 $(m,n) = (2,3)$ 时，$\mathrm{f}''(\frac{2}{5}) = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} = 0.72 > 0$，是极小点，与预测相符。

常见错误

- 把 $f''(x)$ 完整展开。在 x_0 处，因式 $(m+n)x - m$ 为零，所以只有一项留下来。
- 忘记 $x = 0$ 和 $x = 1$ 也是驻点（因为 $m, n \geq 2$），结果把曲线画成在该处斜斜地穿过轴。
- 弄错 $x < 0$ 时的正负号。它取决于 $m + n$，而不是单单取决于 m。

STEP 之外

多项式在重数（multiplicity）为 k 的根附近，局部形状与 $c(x-a)^k$ 相似，而 k 的奇偶性决定了曲线是相切还是穿过。这是迈向泰勒定理（Taylor's theorem）和驻点的高阶导数判别法的第一步：若驻点处第一个不为零的导数是 k 阶的，则当 k 是偶数时该点是转向点，当 k 是奇数时该点是拐点。Abbott 的 *Understanding Analysis* 为这些想法建立了严格的基础。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。