详细解答

STEP I 2002，第 13 题

概率与统计 • 条件期望值

STEP I 2002，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s1-q13

关键思路

(U, V) 只有六个可能的组合，所以整件事归结为一个小小的联合概率（joint probability）表，再对每种情况做少许代数运算。对于二次方程，V 的正负号决定一切，因为 U^2 最多是 1。对于三次方程，各项系数与 U 和 V 纠缠得令人起疑；这强烈暗示它可以因式分解（factorise），而一旦分解出来，各个根便一目了然。

解答

首先建立联合分布（joint distribution）。由于 $\mathrm{P}(U = u,\, V = v) = \mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(V = v \mid U = u)$，而对每个 u 都有 $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$，

	$U = 1$	$U = 0$	$U = -1$
$V = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
$V = -1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

六个数值加起来是 1，理应如此。

第 (i) 部分

$x^2 + Ux + V = 0$ 的两个根皆为实数，当且仅当判别式（discriminant）非负：$U^2 - 4V \geq 0$。

- 若 $V = -1$，判别式为 $U^2 + 4 > 0$，所以无论 U 取甚么值，两个根都是实数（而且相异）。
- 若 $V = 1$，由于 $U^2 \leq 1$，判别式为 $U^2 - 4 \leq 1 - 4 < 0$。所以两个根永远不是实数。

因此，两个根皆为实数当且仅当 $V=-1$，而

$$\mathrm{P}(\text{两根皆为实数})=\mathrm{P}(V=-1)=\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9}=\tfrac{4+3+2}{18}=\tfrac{1}{2},$$

正是所求。

第 (ii) 部分

根据第 (i) 部分，以“两根皆为实数”为条件，等同于以 $V=-1$ 为条件。把表中最下一行除以 $\mathrm{P}(V=-1)=\frac{1}{2}$，得

$$\mathrm{P}(U=1\mid V=-1)=\tfrac{4}{9},\qquad \mathrm{P}(U=0\mid V=-1)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{P}(U=-1\mid V=-1)=\tfrac{2}{9}.$$

> **想一想** 为甚么这里不能直接用 $\mathrm{P}(U=u)=\frac{1}{3}$?

因为 U 与 V 并非独立（independent）：知道 $V=-1$ 之后，$U=1$ 的可能性便会提高（因为当 $U=1$ 时，$V=-1$ 的概率是 $\frac{2}{3}$）。我们要求的是条件期望值，所以权重必须是条件概率（conditional probability）。

当 $V=-1$ 时，方程为 $x^2+Ux-1=0$，其较大的根是

$$R=\frac{-U+\sqrt{U^2+4}}{2}.$$

所以当 $U=1$ 时 $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，当 $U=0$ 时 $R=1$，当 $U=-1$ 时 $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R\mid\text{两根为实数})&=\tfrac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\tfrac{1}{3}\cdot 1+\tfrac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\&=\frac{4\sqrt{5}-4+6+2\sqrt{5}+2}{18}\\&=\frac{6\sqrt{5}+4}{18}=\frac{3\sqrt{5}+2}{9}.\end{aligned}$$

第 (iii) 部分

常数项是 U，这提示我们有因式 $(x+U)$。果然

$$\begin{aligned}(x+U)(x^2-2Vx+1)&=x^3-2Vx^2+x+Ux^2-2UVx+U\\&=x^3+(U-2V)x^2+(1-2UV)x+U,\end{aligned}$$

这正是题目给出的三次式。所以方程的根是 $x=-U$，连同 $x^2-2Vx+1=0$ 的根。由于 $V=\pm1$ 给出 $V^2=1$，这个二次方程的判别式为 $4V^2-4=0$。所以它有重根（repeated root）$x=V$，而三次方程就是

$$(x+U)(x-V)^2=0,$$

其根为 $-U$、V、V。

三个根全为正数，当且仅当 $-U>0$ 且 $V>0$，即 $U=-1$ 且 $V=1$。（当 $U=0$ 时，其中一个根是 0，并非正数。）从表中可得

$$\mathrm{P}(\text{所有根皆为正数})=\mathrm{P}(U=-1,\,V=1)=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{9}.$$

验算

- 条件概率 $\frac{4}{9},\frac{1}{3},\frac{2}{9}$ 加起来是 1。
- 第 (ii) 部分的答案约为 0.967。它必须介乎较大根的最小可能值 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$ 与最大可能值 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\approx 1.618$ 之间，而且应该低于中间值 1，因为最小的根所占的权重最大。结果确是如此。
- 在第 (iii) 部分，试代入 $U=-1$、$V=1$：三次式变成 $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$，根为 $1,1,1$，全是正数。再试 $U=1$、$V=1$：三次式变成 $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$，它有负根 -1。
- 我们以分数对六种情况逐一精确枚举，并在每种情况下以数值方法求出三次方程的根，从而确认了全部三个答案。

常见错误

- 在第 (ii) 部分使用无条件的权重 $\frac{1}{3}$，结果得出 $\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)\approx 1.079$。
- 在第 (iii) 部分把 $U=0$ 也计算在内：等于 0 的根并非正数。
- 试图用判别式或正负号变化来分析三次方程，而不去寻找因式分解。

STEP 之外

这道题的核心是条件期望值（conditional expectation）$\mathrm{E}(X\mid A)$，计算方法是以条件概率重新加权。到了大学，这个概念会发展成本身就是一个随机变量（random variable）的条件期望值 $\mathrm{E}(X\mid Y)$，以及塔式法则（tower law）$\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X\mid Y)\big)=\mathrm{E}(X)$，后者能令许多困难的期望值计算变得轻而易举。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）对此有清晰的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。