详细解答

STEP I 2002，第 12 题

概率与统计 • 几何概率

> **STEP I 2002，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q12

关键思路

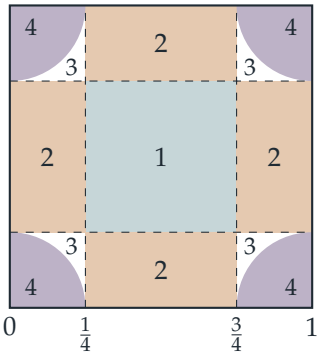
方格网不断重复，所以“随机放下马蹄”的意思，就是马蹄的中心在一个单位正方形上均匀分布（uniformly distributed）。马蹄碰到多少个方格，只取决于中心离该正方形的边和角有多近，因此每个答案都对应正方形内的一个区域，而它的概率就是该区域的面积。求出四个概率之后，余下的工作就是把这些概率及其平均值，与 Harry 的实际表现作比较。

解答

Harry 答案的分布

设马蹄的中心 C 位于单位正方形 $0 \le x \le 1$、$0 \le y \le 1$ 之内。若 Harry 随机放下马蹄，则由方格网的周期性（periodicity）可知 C 在这个正方形上均匀分布，所以 C 落在某个区域内的概率就是该区域的面积。设 N 为被马蹄部分覆盖的方格数目。

马蹄的半径为 $\frac{1}{4}$，小于 $\frac{1}{2}$，所以它最多只能跨过一条垂直格线和一条水平格线。它跨过垂直格线，当且仅当 $x < \frac{1}{4}$ 或 $x > \frac{3}{4}$；它跨过水平格线，当且仅当 $y < \frac{1}{4}$ 或 $y > \frac{3}{4}$。（与格线的距离刚好等于 $\frac{1}{4}$ 的位置面积为零，所以可以不理。）



“跨过垂直格线”和“跨过水平格线”这两个事件的概率各为 $\frac{1}{2}$，而且两者独立（independent），因为 x 和 y 是互相独立的均匀坐标。所以：

- $N = 1$ 即马蹄没有跨过任何格线：此时 C 位于中央边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形内，所以 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$。
- $N = 2$ 即马蹄刚好跨过一条格线：$\mathrm{P}(N = 2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。
- 当马蹄跨过垂直和水平格线各一条时，C 位于四个边长为 $\frac{1}{4}$ 的角落正方形其中之一，总概率为 $\frac{1}{4}$。这两条格线相交于方格网的一个格点，而马蹄覆盖该格点周围全部四个方格的一部分，当且仅当它覆盖该格点本身。

想一想 在角落正方形内，为甚么答案取决于与格点的距离？

考虑最接近原点的角落正方形，即 $0 < x < \frac{1}{4}$ 及 $0 < y < \frac{1}{4}$。马蹄必定碰到 C 所在的方格、它左边的方格和它下面的方格。至于对角的方格 $x < 0$、$y < 0$，其中最接近的点是原点，与 C 的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2}$，所以马蹄进入这个方格，当且仅当 $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{4}$。因此，当 C 与某个格点的距离小于 $\frac{1}{4}$ 时 $N = 4$，否则 $N = 3$。

单位正方形内与其中一个顶点的距离小于 $\frac{1}{4}$ 的点，组成四个半径为 $\frac{1}{4}$ 的四分之一圆盘，总面积为 $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$。因此

$$\mathrm{P}(N = 1) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(N = 2) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(N = 3) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}, \qquad \mathrm{P}(N = 4) = \tfrac{\pi}{16}.$$

目前的证据与“随机的马”是否吻合？

当正确答案是 $4 \div 4 = 1$ 时，一匹随机的马答对的概率是 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{4}$。当正确答案是 $2 + 2 = 4$ 时，牠答对的概率是 $\mathrm{P}(N = 4) = \frac{\pi}{16} \approx 0.196$。这正正就是观察所得的成功率，所以答案是肯定的：这些证据与我的怀疑完全吻合，即 Harry 只是随机放下马蹄。

答案的期望值，以及换一匹新马

若 Harry 随机放下马蹄，他的答案便与题目无关，所以他的答案的期望值（expected value）就是 $\mathrm{E}(N)$（各个正确答案出现的频率相同这一点，在这里不起作用）：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= 1\cdot\tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{2} + 3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}\right) + 4\cdot\tfrac{\pi}{16}\\ &= \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{\pi}{16}\\ &= 2 + \tfrac{\pi}{16} \approx 2.20.\end{aligned}$$

把观察所得的平均值 2 与两个假设作比较。

- *Harry 计算正确*。正确答案是 $1, 2, 3, 4$，各自出现的次数相同，所以平均值应为 $\frac{5}{2}$。平均值 2 远低于此，所以 Harry 肯定答错了很多题。事实上，每个错误答案最多比正确答案小 3，而平均少了 $\frac{1}{2}$，所以他的答案中至少有 $\frac{1}{6}$ 是错的。
- *Harry 是随机的*。平均值应接近 $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.20$。单一答案的方差（variance）为 $\mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{9}{2} + \frac{7\pi}{16} - \left(2 + \frac{\pi}{16}\right)^2 \approx 1.05$，所以做了 n 道题之后，平均值的标准差（standard deviation）约为 $1.02/\sqrt{n}$。题目“很多”的时候（例如 $n = 400$，标准差约为 0.05），平均值 2 低了大约四个标准差，纯粹出于偶然的可能性极低。

所以，做了很多道题之后，平均值 2 即使对一匹随机放下马蹄的马来说也太低：Harry 似乎偏好较小的答案，仿佛他下蹄很轻，或者瞄准方格的中央。无论如何，他并没有在做计算，而且表现比一匹随机的马还要差。是的：是时候换一匹新马了（不过也许该找一匹会做算术的）。

验算

- 四个概率之和为一：$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = 1$，而 $\mathrm{P}(N = 3) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} \approx 0.054$ 为正数，这是必须的。
- 模拟（simulation）400 000 次随机放下马蹄，并数出与中心的距离小于 $\frac{1}{4}$ 的方格数目，所得的相对频率为 0.2495、0.4990、0.0547、0.1968，平均值为 2.199，而理论值为 $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.196$。
- 合理性检查：若马蹄非常小，答案几乎总是 1，平均值会趋向 1。马蹄愈大，答案愈大，而我们的情况介乎两者之间。

常见错误

- 以为马蹄只要跨过两条格线，就一定覆盖四个方格。其实它还要碰到两条格线相交的格点，而 π 正是因此而出现。

▶ 因为平均值 2“低于 2.5”，就把它当作随机的证据。随机的假设所预测的平均值约为 2.2，所以必须与这个数值比较，并考虑平均值的离散程度。

STEP 之外

这就是几何概率（geometric probability）：当一点在某个区域上均匀分布时，概率就是面积。同样的想法可以用来处理蒲丰投针问题（Buffon's needle），其答案同样涉及 π，十分著名。最后一部分让你初尝假设检验（hypothesis testing）的滋味：利用中心极限定理（central limit theorem）来判断在某个模型之下，观察所得的平均值是否合理。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）涵盖了连续均匀分布，以及这类论证背后的极限定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。