详细解答

STEP I 2002，第 11 题

力学 • 弹性斜碰撞

STEP I 2002，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

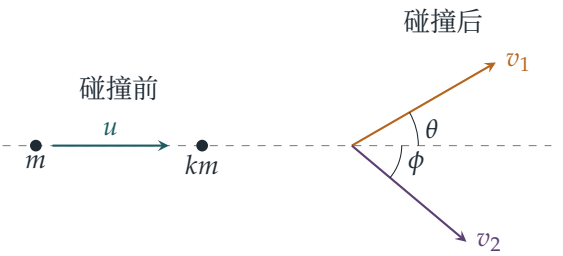
step.maths.org/questions/02-s1-q11

关键思路

一次碰撞给我们两条守恒定律：动量（momentum）守恒（动量是向量，所以有两条分量方程），以及动能（kinetic energy）守恒（因为没有能量损失）。两条动量方程对于碰撞后的未知速率而言是线性的，所以我们可以解出这些速率，并以角度表示。再代入能量方程，便可消去所有速率，只剩下角度与 k 之间的关系式。

解答

我们把 P_1 和 P_2 看成在平面上运动的质点（particle），并假设碰撞期间没有外力作用。设 P_1 以速率 $u > 0$ 沿 x 轴趋近，并设碰撞后的速率分别为 v_1（P_1 的速率，方向在轴的上方，与轴成角 θ）和 v_2（P_2 的速率，方向在轴的下方，与轴成角 ϕ），其中 $0 < \theta < \pi$ 及 $0 < \phi < \pi$。



恒等式

沿原来的运动方向及与之垂直的方向应用动量守恒，（约去 m 后）得

$$v_1\cos\theta + kv_2\cos\phi = u,$$
$$v_1\sin\theta - kv_2\sin\phi = 0,$$

其中出现负号，是因为 P_2 向轴的另一侧离开。由动能守恒，约去 $\frac{1}{2}m$ 后得

$$v_1^2 + kv_2^2 = u^2. \qquad (*)$$

两条动量方程是关于两个未知量 v_1 和 kv_2 的线性方程。把第一式乘以 $\sin\phi$，第二式乘以 $\cos\phi$，然后相加：含 kv_2 的项互相抵消，于是

$$v_1(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = u\sin\phi, \qquad \text{所以} \qquad v_1 = \frac{u\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}.$$

同样地，把第一式乘以 $\sin\theta$，第二式乘以 $\cos\theta$，然后相减，得

$$kv_2 = \frac{u\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}.$$

想一想 我们可以除以 $\sin(\theta+\phi)$ 吗?

我们需要 $\theta+\phi \neq \pi$（它严格介乎 0 与 2π 之间）。若 $\theta+\phi=\pi$，则 $\sin\phi = \sin\theta$ 及 $\cos\phi = -\cos\theta$。第二条动量方程变成 $(v_1 - kv_2)\sin\theta = 0$，而 $\sin\theta \neq 0$，所以 $v_1 = kv_2$。这时第一条方程变成 $(v_1 - kv_2)\cos\theta = u$，即 $0 = u$，这是不可能的。因此 $\sin(\theta+\phi) \neq 0$，这个除法并无问题。

现在把结果代入 $(*)$，并把 kv_2^2 写成 $(kv_2)^2/k$：

$$\frac{u^2\sin^2\phi}{\sin^2(\theta+\phi)} + \frac{u^2\sin^2\theta}{k\sin^2(\theta+\phi)} = u^2.$$

全式乘以 $k\sin^2(\theta+\phi)/u^2$（此数不等于零），得

$$\sin^2\theta + k\sin^2\phi = k\sin^2(\theta+\phi),$$

这正是所要证明的结果。

（从几何角度看，动量方程表示动量 mv_1、kmv_2 和 mu 构成一个三角形，其内角为 ϕ、θ 和 $\pi-(\theta+\phi)$，而上面两个表达式不过是这个三角形的正弦定理（sine rule）。）

两条路径互相垂直

若两条路径互相垂直，则 $\theta+\phi = \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin^2(\theta+\phi) = 1$ 及 $\sin\theta = \cos\phi$。恒等式变成

$$\cos^2\phi + k\sin^2\phi = k, \qquad \text{即} \qquad \cos^2\phi = k(1-\sin^2\phi) = k\cos^2\phi.$$

这里 $\cos\phi \neq 0$：否则 $\phi = \frac{\pi}{2}$，于是 $\theta = 0$，但题目已说明 θ 不等于零。两边除以 $\cos^2\phi$，得 $k = 1$，这正是所要证明的结果。

验算

- 桌球中为人熟知的事实：两个质量相等的球作弹性碰撞（elastic collision），而其中一个原本静止，碰撞后两球的运动方向互相垂直。我们的结果正是它的逆命题（converse）。
- 一个数值例子：取 $k = 2$ 及 $\phi = 30°$。沿该直线的光滑弹性碰撞会使 P_2 以速率 $\frac{2}{3}u\cos 30°$ 离开，而 P_1 则沿 $\theta = 90°$ 的方向运动。恒等式两边都等于 $\frac{3}{2}$。
- 我们亦模拟了 2×10^5 次随机弹性碰撞（随机选取 k、u 和碰撞线）。恒等式以及 v_1 和 kv_2 的两条公式均成立，误差在 10^{-12} 以内。

常见错误

- 把垂直方向的动量方程写成 $v_1\sin\theta + kv_2\sin\phi = 0$：两个质点向相反的两侧离开，所以两个分量的符号相反。
- 在能量方程中漏掉 k，或在最后一步没有说明为何 $\cos\phi \neq 0$。

STEP 之外

在随质心（centre of mass）运动的参考系中，弹性碰撞只是把两个速度旋转，而大小保持不变。所有这些角度关系，都是把这个由各种可能结果组成的圆映射回实验室参考系而得出的。这个观点是处理散射（scattering）的标准方法，由桌球以至粒子物理学皆然。在粒子物理学中，人们利用量度所得的散射角来推算相撞粒子的质量比。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）仔细阐述了以质心处理碰撞的方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。