详细解答

STEP I 2002，第 10 题

力学 • 弹性碰撞

STEP I 2002，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s1-q10

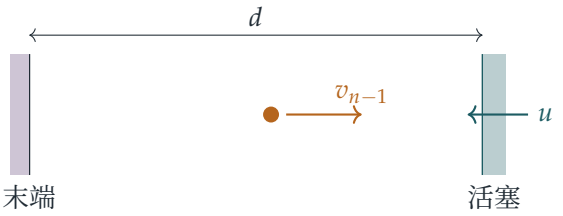
本题在 *Beyond STEP* 第 10.4 节一个分子与一个活塞中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/piston.html

关键思路

质点与一面远比它重的墙发生完全弹性碰撞（perfectly elastic collision）时，相对速度会反向，所以最简单的做法是在活塞（piston）的参考系（reference frame）中思考：在那里，质点只是从一面静止的墙反弹回来。因此，每次与活塞碰撞，速率都会增加 $2u$，而与固定端的碰撞则不会带来任何改变。至于距离，留意在两次与活塞碰撞之间，质点和活塞合共走过的长度有固定的规律，由此可得一条以 d_n 表示 d_{n+1} 的线性方程。

解答

我们把空气模拟为一个质点（particle），把活塞视为一面以恒定速率 u 移动、不受碰撞影响的墙，并把圆筒的末端视为一面固定的墙。所有运动都沿着轴线进行，所以我们取由圆筒末端指向活塞的方向为正方向。



速率

假设质点以速率 w 趋近活塞。活塞的速度为 $-u$，所以质点相对于活塞的速度为 $w+u$（朝向活塞）。在与一面不会被撞偏的墙发生完全弹性碰撞时，根据牛顿实验定律（Newton's experimental law），取 $e=1$，相对速度会反向，所以碰撞后质点相对于活塞的速度为 $-(w+u)$。它的实际速度于是为

$$-u-(w+u)=-(w+2u),$$

所以它以速率 $w+2u$ 离开活塞。

在圆筒的固定端，同一条定律（此时墙是静止的）只会令速度反向：速率不变。所以在相邻两次与活塞碰撞之间，质点的速率保持不变。

第一次碰撞之前，质点以速率 v 朝活塞运动，所以 $v_1 = v+2u$。刚完成第 n 次碰撞后，它的速率为 v_n；它从末端反弹而速率不变，再以速率 v_n 遇上活塞，离开时速率为 $v_{n+1}=v_n+2u$。由归纳法（induction）可得

$$v_n = v+2nu,$$

正是所求。

距离

在第 n 次与第 $(n+1)$ 次碰撞之间（历时 t_n），活塞以速率 u 向内移动，所以

$$d_n - d_{n+1} = u\,t_n.$$

在同一段时间内，质点以恒定速率 v_n 运动，由活塞走到末端（距离为 d_n，因为末端与活塞原来的位置相距 d_n），再返回活塞（距离为 d_{n+1}，即活塞此刻所在的位置）。所以

$$d_n + d_{n+1} = v_n t_n.$$

> ? **想一想** 怎样才能消去 t_n？

把一条方程除以另一条：由于 $t_n>0$，所以

$$\frac{d_n+d_{n+1}}{d_n-d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}.$$

交叉相乘，得 $ud_n+ud_{n+1}=v_nd_n-v_nd_{n+1}$，所以

$$(v_n+u)\,d_{n+1} = (v_n-u)\,d_n.$$

由 $v_n=v+2nu$，可得 $v_n-u=v+(2n-1)u$ 及 $v_n+u=v+(2n+1)u$，所以

$$d_{n+1} = \frac{v+(2n-1)u}{v+(2n+1)u}\,d_n,$$

这就是所求的结果。

d_n 的公式

重复应用这个递推关系（recurrence），

$$d_n = d_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v+(2k-1)u}{v+(2k+1)u} = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u}.$$

这个乘积可以逐项相消（telescope）：每个分母都与下一个分子约去，余下

$$d_n = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1.$$

当 $n=1$ 时这条式同样成立，此时它就是 $d_1 = d_1$。

$v=u$ 的情况

代入 $v=u$，得

$$d_n = \frac{2u}{2nu}\, d_1 = \frac{d_1}{n}.$$

然后，由 $ut_n = d_n - d_{n+1}$，

$$ut_n = \frac{d_1}{n} - \frac{d_1}{n+1} = \frac{d_1}{n(n+1)},$$

正是所求。

验算

- 当 $u=0$ 时，活塞是一面固定的墙：公式给出对所有 n 都有 $v_n = v$ 及 $d_n = d_1$，与预期相符。
- 取 $u=1$、$v=3$、$d_1=75$。公式预测 $d_2=50$、$d_3=37.5$、$d_4=30$，而速率为 $5,7,9,11$。以有理数运算逐步精确模拟反弹过程，所得结果与此完全相同；随机选取 200 组 u、v 和起始位置，结果亦同样吻合。
- 当 $v=u$ 时，$\sum ut_n = d_1 \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = d_1$：活塞合共恰好移动了 d_1，到达圆筒的末端，这与 $d_n = d_1/n \to 0$ 一致。

常见错误

- 错用 $d_n - d_{n+1}$，例如把质点来回一趟的路程当作 $2d_n$：活塞在这段时间内已经移动了，所以回程只有 d_{n+1}。
- 每次碰撞只加上 u 而不是 $2u$。相对速度会反向，所以质点速度的改变量是活塞所带来的趋近速率的两倍。

STEP 之外

每次碰撞都令质点的速率改变一个固定的量，但随着间隙收窄，碰撞会愈来愈频密，而当 n 很大时，乘积 $v_n d_n$ 大致保持不变（这里当 n 很大时 $v_n d_n \approx (v+u)d_1$）。这种缓慢变化的守恒量称为绝热不变量（adiabatic invariant）；对大量分子取平均后，它解释了为何气体被迅速压缩时会变热：对于一维的缓慢压缩，$T \propto 1/L^2$。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是进一步学习碰撞和参考系的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。