详细解答

STEP I 2002，第 1 题

纯数学 · 圆与椭圆

STEP I 2002，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s1-q1

关键思路

先找出两个椭圆（ellipse）实际相交之处。两条方程都只通过 y^2 含有 y，所以消去 y^2 后便得到一条 x 的二次方程，而结果显示两个椭圆只相交于两个实点。通过两个已知点的圆，其圆心必在这两点的垂直平分线（perpendicular bisector）上，这样便把圆的方程确定为一个单参数族（one-parameter family）。

解答

求交点

展开后，两个椭圆的方程为

$$x^2 + 4x + 2y^2 = 14,$$
$$9x^2 - 18x + 16y^2 = 16.$$

把第一式乘以 8，再减去第二式，便可消去 y^2：

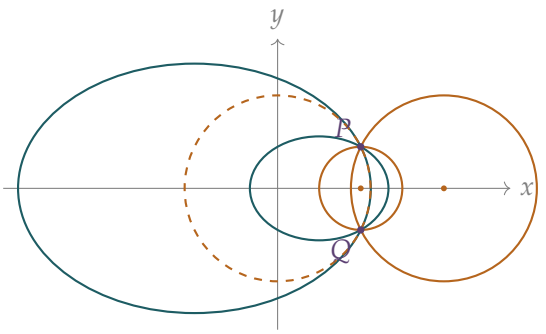
$$8x^2 + 32x - 9x^2 + 18x = 112 - 16 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 50x + 96 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x-48) = 0.$$

? **想一想** 为甚么不能把两个根都保留?

每个根仍须给出实数的 y。由第一个椭圆得 $2y^2 = 14 - x^2 - 4x$。

- $x = 48$：$2y^2 = 14 - 2304 - 192 < 0$，所以没有实点。（无论如何，第一个椭圆只涵盖 $-2 - 3\sqrt{2} \le x \le -2 + 3\sqrt{2}$。）
- $x = 2$：$2y^2 = 14 - 4 - 8 = 2$，所以 $y = \pm 1$。

因此两个椭圆恰好相交于两点，即 $P=(2,1)$ 和 $Q=(2,-1)$。（两点亦满足第二条方程：$9+16=25$。）



图中所示为两个椭圆（蓝绿色），以及通过 P 和 Q 的其中三个圆（琥珀色），圆心分别为 $(0,0)$、$(2,0)$ 和 $(4,0)$。

通过 P 和 Q 的圆

任何通过 P 和 Q 的圆，其圆心与这两点等距，所以圆心位于 PQ 的垂直平分线上。线段 PQ 是铅垂的，中点为 $(2,0)$，所以它的垂直平分线就是 x 轴。因此圆心为 $(a,0)$，其中 a 为某个实数，而半径满足

$$r^2=(2-a)^2+1^2.$$

于是圆的方程为

$$\begin{aligned}(x-a)^2+y^2&=(2-a)^2+1\\ x^2-2ax+a^2+y^2&=4-4a+a^2+1\\ x^2-2ax+y^2&=5-4a,\end{aligned}$$

这正是所求的形式。

反过来说，对每个实数 a，这条方程都表示一个真正的圆，圆心为 $(a,0)$，半径为 $\sqrt{(a-2)^2+1}>0$，而且它通过 $(2,\pm1)$，因为 $4-4a+1=5-4a$。所以这个圆族恰好就是通过两个交点的所有圆所组成的集合。

想一想 那么，把两条方程组合起来这个惯用技巧又如何?

取 $7\times$（第一式）$-$（第二式），可令 x^2 和 y^2 的系数相等，得出 $x^2-23x+y^2+41=0$，这是我们的圆族中 $a=\frac{23}{2}$ 的那一个成员。但这只是一个圆。两条方程的组合，是通过全部四个（复数）公共点的圆锥曲线（conic），当中包括 $x=48$ 的两个非实点；而一个圆只需通过那两个实点。这就是本题必须采用直接方法的原因。

验算

- $a = 2$ 给出 $x^2 - 4x + y^2 = -3$，即 $(x-2)^2 + y^2 = 1$：这是以 PQ 为直径的圆，正如所料。
- $a = 0$ 给出 $x^2 + y^2 = 5$，而确实 $2^2 + 1^2 = 5$。
- 在 $-6 \le x \le 6$ 的范围内以数值方法搜索同时位于两个椭圆上的点，只找到 $x = 2$。在 $(2,1)$ 处，两个椭圆的法线（normal）方向分别为 $(8,4)$ 和 $(18,32)$，两者并不平行，所以两个椭圆在该点是真正相交，而不是相切。

常见错误

- 保留 $x = 48$，却没有检查 y 是否实数。
- 由两条椭圆方程的组合得出单独一个圆后便停下来：题目问的是通过这些点的*任何*圆。

STEP 之外

两条圆锥曲线的组合 $\lambda E_1 + \mu E_2 = 0$ 称为*曲线束*（pencil）：它由通过两者四个公共点的圆锥曲线组成，而这些公共点是在复射影平面（complex projective plane）上计算的。这道题目正好提醒我们，这些点当中有些可能是非实点，而圆是特殊的（所有圆都通过两个固定的复数点，即“无穷远圆点”（circular points at infinity））。这些概念属于射影几何（projective geometry）和代数几何（algebraic geometry）的范畴；若想以这种观点初步认识平面曲线和圆锥曲线，可参阅 Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry*（一本平易近人的入门书），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。