详细解答

STEP III 2001，第 9 题

力学 · 摩擦力与简谐运动

> **STEP III 2001，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q9

关键思路

两条横梁沿一条与水平成 α 角的直线相距 d，因此木板的倾角就是 α。木板滑动时，它的重量由 B_1 逐渐转移到 B_2，而两个法向反作用力（normal reaction）随重心（centre of gravity）的位置线性地变化。由于两个摩擦系数（coefficient of friction）不同，总摩擦力也随之线性变化；回复力（restoring force）与位移成正比，这就是简谐运动（simple harmonic motion）。条件 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ 的作用，正是令这个运动的中心刚好落在两条横梁的正中间。

解答

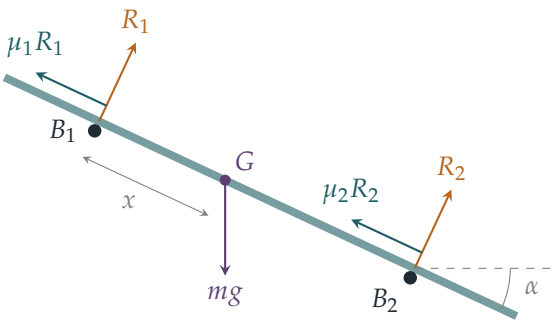
模型

把木板视为质量为 m 的刚性杆（rigid rod），它始终与两条横梁保持接触，而横梁则视为点。由 B_1 到 B_2 的直线长度为

$$\sqrt{d^2\sin^2\alpha + d^2\cos^2\alpha} = d$$

并与水平成 α 角，所以木板沿这条直线摆放，由 B_1 向下倾斜至 B_2。设 x 为重心 G 与 B_1 的距离，沿木板向斜下方量度，于是释放时 $x = 0$，而当 $x = d$ 时 G 位于 B_2 之上。

当 $0 \le x \le d$ 时，G 位于两条横梁之间。作用于木板的力有：作用于 G 的重量 mg；在 B_1、B_2 处垂直于木板的法向反作用力 R_1、R_2；以及当木板沿斜面向下运动时，沿斜面向上的摩擦力 $\mu_1 R_1$ 和 $\mu_2 R_2$。



法向反作用力

木板在垂直于自身的方向上没有运动，所以沿垂直于木板的方向分解力，得

$$R_1 + R_2 = mg\cos\alpha.$$

木板也没有转动，所以对 G 取力矩（moment）（重量和两个摩擦力的作用线或通过 G，或沿着木板，因此它们没有力矩），得

$$R_1 x = R_2(d - x).$$

解这两条方程，得

$$R_1 = \frac{mg\cos\alpha\,(d-x)}{d}, \qquad R_2 = \frac{mg\cos\alpha\,x}{d}.$$

当 $0 \le x \le d$ 时两者皆非负，所以木板确实一直搁在两条横梁上。

运动方程

当木板沿斜面向下运动时，沿斜面向下分解力，得

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 \\ &= mg\cos\alpha\left[\tan\alpha - \mu_1 - \frac{(\mu_2-\mu_1)x}{d}\right]. \end{aligned}$$

现在使用题目给出的条件：由 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ 得 $\tan\alpha - \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$。因此

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \tfrac{1}{2}d\right), \qquad \text{其中} \qquad \omega^2 = \frac{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{d} > 0,$$

不等式成立是因为 $\mu_2 > \mu_1$ 且 $\cos\alpha > 0$。

? **想一想** 木板真的会开始运动吗？摩擦力是否一直指向斜面上方？

在 $x=0$ 处，$\ddot{x}=\frac{1}{2}\omega^2 d>0$，所以木板确实会开始向下滑。上面的方程描述的是以 $x=\frac{1}{2}d$ 为中心的简谐运动，而由于 $t=0$ 时 $x=0$、$\dot{x}=0$，它的解为

$$x=\tfrac{1}{2}d\,(1-\cos\omega t),\qquad \dot{x}=\tfrac{1}{2}d\,\omega\sin\omega t.$$

当 $0<t<\pi/\omega$ 时有 $\dot{x}>0$，所以木板在整段时间内的确一直沿斜面向下运动，假设摩擦力沿斜面向上是正确的。此外，整段时间内 $0\le x\le d$，所以 G 一直位于两条横梁之间，R_1、R_2 的表达式仍然有效。

静止下来

速度第一次再度为零是在 $\omega t=\pi$ 之时，这时 $x=\frac{1}{2}d(1-\cos\pi)=d$：重心正好位于 B_2 之上。在这一刻 $R_1=0$ 而 $R_2=mg\cos\alpha$，所以木板只搁在 B_2 上。它会停留在那里，因为 B_2 处的摩擦力最大可达 $\mu_2 mg\cos\alpha$，而重量沿斜面向下的分量是 $mg\sin\alpha$，并且

$$\mu_2=\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)+\tfrac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)>\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)=\tan\alpha.$$

所以木板静止下来时，重心位于 B_2 之上，所需时间为

$$\frac{\pi}{\omega}=\pi\left(\frac{d}{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

这正是所要证明的结果。

验算

- 若 $\mu_2-\mu_1$ 很小，木板几乎不减速，所需时间很长，与公式相符。这时每个 μ 都接近 $\tan\alpha$，所以合力在各处都接近零。
- 我们随机选取 α、d、μ_1（并取 $\mu_2=2\tan\alpha-\mu_1$），以数值方法逐步求解运动方程，直至速度第一次回到零为止。例如，取 $\alpha=0.7$、$d=2$、$\mu_1=0.3$ 及 $g=9.8$，预测的时间约为 1.56 秒。在每一个情况中，停止的时间和位置都与 π/ω 和 $x=d$ 吻合，（相对）误差在 10^{-5} 以内。

常见错误

- 取 $R_1=R_2=\frac{1}{2}mg\cos\alpha$。反作用力取决于 G 的位置，而正是这种依赖关系产生了振荡。
- 只做到“速度为零”便停笔，没有检查木板其后是否保持静止：你需要 $\mu_2\ge\tan\alpha$。

STEP 之外

这个运动是一个振子（oscillator）的半个周期，而它的“弹簧”来自随负载而变的摩擦力。摩擦力取决于位置或速度的系统会产生丰富多变的现象，包括黏滑振荡（stick–slip oscillation），门铰吱吱作响和琴弓拉动小提琴弦线，背后都是这种振荡。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对摩擦、刚体平衡和简谐运动都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。