详细解答

STEP III 2001，第 8 题

纯数学 · 复数轨迹

STEP III 2001，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s3-q8

关键思路

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 并展开：(i) 中的两条方程都会化简成同一个圆。至于 (ii) 中的辐角（argument）条件，可直接计算 $\frac{z-2}{z}$；辐角为 $\frac{\pi}{4}$ 的意思是“实部（real part）等于虚部（imaginary part），而且两者皆为正数”，这就是同一个圆再加上一个不等式。在 (iii) 中，把 $z = 2/w$ 代入圆的两种形式之中运算最简洁的那一种。(i) 中的第二种形式正是为此而设。

解答

第 (i) 部分

设 $z = x + \mathrm{i}y$。第一条方程是

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

第二条方程是

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2[(x-1)^2 + y^2] \\ \iff\ & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2 \\ \iff\ & 0 = x^2 + y^2 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

每一步都可逆，所以两条方程都等价于 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$，描述的是同一个轨迹（locus）。这个轨迹是以 $1 + \mathrm{i}$ 为圆心、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆。它通过 0、2 和 2i（以及 $2 + 2\mathrm{i}$），最低点是 $1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$，刚好在实轴（real axis）之下。

第 (ii) 部分

当 $z \neq 0$ 时，

$$\frac{z-2}{z} = \frac{(z-2)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

因为 $(z-2)\bar{z} = |z|^2 - 2\bar{z} = x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y$。

? **想一想** $\arg(\text{某数}) = \frac{\pi}{4}$ 究竟说明了它的实部和虚部有甚么关系?

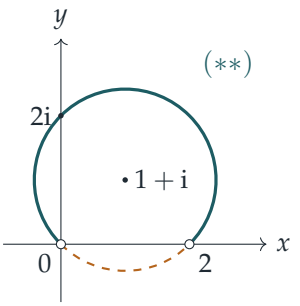
一个非零复数（complex number）$a+\mathrm{i}b$ 的辐角为 $\frac{\pi}{4}$，当且仅当它位于射线 $a = b > 0$ 上。单有相等并不足够：$a = b < 0$ 时辐角是 $-\frac{3\pi}{4}$。分母 x^2+y^2 为正数，所以 $(**)$ 成立当且仅当

$$x^2+y^2-2x = 2y \quad \text{及} \quad 2y > 0,$$

即当且仅当 z 位于 (i) 的圆上而且 $y > 0$。条件 $y > 0$ 自动排除了 $z = 0$（该处商没有定义）和 $z = 2$（该处商为零，没有辐角）。

因此 $(**)$ 描述的是圆在实轴以上的部分：由 0 出发，绕经 2i 和 $2+2\mathrm{i}$ 到达 2 的优弧（major arc），两个端点都不包括在内。实轴以下的短弧所对应的辐角则是 $-\frac{3\pi}{4}$。

这与几何上的理解吻合。$\arg\frac{z-2}{z}$ 是在 z 处、连往 0 和连往 2 的两条弦之间的夹角。由 0 到 2 的弦在圆心 $1+\mathrm{i}$ 所对的角是直角，所以根据圆心角定理（angle-at-the-centre theorem），它在优弧上每一点所对的角都是 $\frac{\pi}{4}$。



整个圆是 $(*)$；实线弧（不包括端点 0 和 2）是 $(**)$，虚线弧则不属于 $(**)$。

第 (iii) 部分

由于 $w = 2/z$，我们有 $z \neq 0$ 及 $z = 2/w$。采用圆的第二种形式 $|z-(1-\mathrm{i})|^2 = 2|z-1|^2$。代入后得

$$z-1 = \frac{2-w}{w}, \qquad z-(1-\mathrm{i}) = \frac{2-(1-\mathrm{i})w}{w} = \frac{(1-\mathrm{i})[(1+\mathrm{i})-w]}{w},$$

其中用到 $\frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$。由于 $|1-\mathrm{i}|^2 = 2$，方程变成

$$\frac{2\,|w-(1+\mathrm{i})|^2}{|w|^2} = \frac{2\,|w-2|^2}{|w|^2} \iff |w-(1+\mathrm{i})| = |w-2|.$$

所以 w 与 $1+\mathrm{i}$ 和 2 等距：轨迹是连接这两点的线段的垂直平分线（perpendicular bisector）。中点是 $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，线段的方向是 $1-\mathrm{i}$，所以平分线的方向是 $1+\mathrm{i}$。设 $w = u+\mathrm{i}v$，轨迹就是直线

$$v = u-1.$$

这条直线上的每一点都会出现。线上每个 w 都非零，因为 0 不在这条直线上，而 $z = 2/w$ 则由上面各个可逆的步骤可知满足 $(*)$。圆上唯一没有像（image）的点是 $z = 0$，它被“送到无穷远”。一如所料，通过原点的圆在 $w = 2/z$ 之下映射成一条直线。

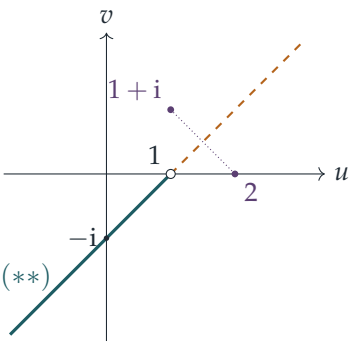
至于对应 $(**)$ 的部分，留意

$$\frac{z-2}{z} = 1-\frac{2}{z} = 1-w,$$

所以 $(**)$ 变成 $\arg(1-w) = \frac{\pi}{4}$，即 $1-w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，其中 $r>0$。因此

$$w = 1-\frac{r}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}), \qquad r>0,$$

这是直线 $v = u-1$ 上由 $w=1$（不包括在内）出发、向左下方延伸的半直线（half-line）：即 $u<1$ 的点，等价地说是 $v<0$ 的点。这与 (ii) 吻合：$\operatorname{Im} w = -2y/|z|^2$，所以 $y>0$ 对应 $v<0$。例如，$z = 2\mathrm{i}$ 映射到 $w = -\mathrm{i}$，而 $z=2$ 则映射到被排除的端点 $w=1$。



整条直线 $v = u-1$ 是 $(*)$ 的像；实线半直线（$u<1$，不包括 $w=1$）是 $(**)$ 的像。点线线段连接的是被这条直线平分的两点。

验算

- $z = 2\mathrm{i}$ 在圆上，而且在实轴之上：$\frac{2\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$，其辐角为 $\frac{\pi}{4}$。它的像 $w = -\mathrm{i}$ 满足 $v = u-1$，且 $u<1$。

- 圆的最高点 $z = 1 + (1 + \sqrt{2})\mathrm{i}$ 映射到 $w \approx 0.2929 - 0.7071\mathrm{i}$，而确实有 $0.2929 - 1 = -0.7071$。
- 实轴以下的一点 $z = 1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$ 给出 $\arg \frac{z-2}{z} = -\frac{3\pi}{4}$。它的像有 $u > 1$，位于直线的另一半。

常见错误

- 把 $\arg Z = \frac{\pi}{4}$ 仅仅当作 $\operatorname{Re} Z = \operatorname{Im} Z$，于是声称答案是整个圆。实部和虚部还须同为正数。
- 在 (ii) 中忘记排除 $z = 0$ 和 $z = 2$，或在 (iii) 中忘记排除 $w = 1$。
- 以为圆的像必定是另一个圆。在 $w = 2/z$ 之下，通过原点的圆会变成直线。

STEP 之外

映射 $w = 2/z$ 是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation）。这类映射把圆和直线映射成圆和直线，而一个圆变成直线，当且仅当它通过那个被送到无穷远的点。这里弧的两个端点 0 和 2 分别去到 ∞ 和 1。商 $\frac{z-2}{z-0}$ 量度的是这两个端点所对的角，它变成了 $1 - w$：由像点指向 1 的方向。这就是 (ii) 中的弧在 (iii) 中变成半直线的原因。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种几何观点阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。