详细解答

STEP III 2001，第 7 题

纯数学 · 正交轨线

> **STEP III 2001，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q7

关键思路

这条微分方程（differential equation）是可分离变量（separable）的，所以只要把它解出来，就能直接看出这族曲线是甚么。至于正交（orthogonal）曲线，切线（tangent）互相垂直即表示两个斜率（gradient）的乘积为 -1。由此得到第二条可分离变量的方程，而对它积分时，开首所描绘的那个函数便会出现。题目先要我们画第一幅略图，正是为了让我们几乎不费工夫就能画出最后的曲线。

解答

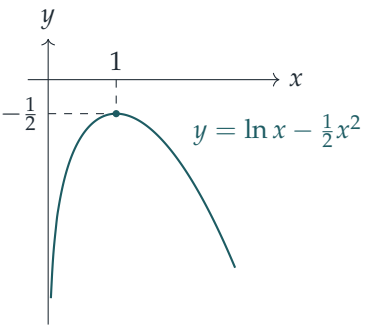
$\ln x - \frac{1}{2}x^2$ 的图像

设 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$，定义域为 $x > 0$。则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0.$$

当 $x > 0$ 时，唯一的驻点（stationary point）位于 $x = 1$，该处 $f(1) = -\frac{1}{2}$。由于 $f'' < 0$ 处处成立，这是一个极大值（maximum），而且整个图像都是向下凹（concave）的。所以对任何 $x > 0$ 都有 $f(x) \le -\frac{1}{2} < 0$，图像永不与 x 轴相交。

在定义域的两端，当 $x \to 0^+$ 时 $f(x) \to -\infty$（因为 $\ln x \to -\infty$），所以 y 轴是一条垂直渐近线（vertical asymptote）。另外，当 $x \to \infty$ 时也有 $f(x) \to -\infty$，因为 $\frac{1}{2}x^2$ 的增长远比 $\ln x$ 快。



抛物线族

常数函数 $y = 0$ 是一个解。在其他情况下，我们分离变量，并避开 $x = \pm 1$，因为方程在该处没有定义：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x^2-1| + c.$$

所以 $|y| = \mathrm{e}^c\,|x^2-1|$。把正负号并入常数，再连同 $y = 0$ 一并考虑，方程的解为

$$y = A(x^2-1), \qquad A \text{ 为常数.}$$

反过来，每一条这样的曲线都满足该方程，因为

$$y' = 2Ax = \frac{2x \cdot A(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2xy}{x^2-1}.$$

当 $A \neq 0$ 时，每条曲线都是抛物线（parabola）。它通过 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$，因为在该两点 $x^2-1=0$。它的斜率 $2Ax$ 只在 $x=0$ 时为零，所以它的顶点（vertex）是 $(0,-A)$，位于 y 轴上。这就是题目所求的曲线族。

正交曲线

取一点 (x,y)，其中 $x \neq \pm 1$ 且 $y \neq 0$。曲线族中恰好有一条抛物线通过这一点，即 $A = y/(x^2-1)$ 的那一条，而它在该点的斜率为 $\dfrac{2xy}{x^2-1}$。所求的曲线若要与这条抛物线成直角相交，两个斜率的乘积必须为 -1，所以该曲线必须满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2-1}{2xy} = \frac{1-x^2}{2xy}.$$

> ? **想一想** 为甚么可以用抛物线的微分方程，而不用公式 $y = A(x^2-1)$ 来求斜率?

微分方程只用 x 和 y 就表示出通过 (x,y) 的那条族中曲线的斜率，完全不涉及 A。这正是我们所需要的，因为正交曲线在它的每一点上所遇到的都是不同的抛物线。

再次分离变量，

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} - x \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

这里取 $x > 0$，因为曲线通过 $(1,1)$。右边是 $f(x) + C$，即我们在开首所描绘的函数。在 $(1,1)$ 处须有 $1 = 0 - \frac{1}{2} + C$，所以 $C = \frac{3}{2}$，曲线为

$$\boxed{y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}} \qquad \text{或等价地} \qquad y^2 = f(x) + \tfrac{3}{2}.$$

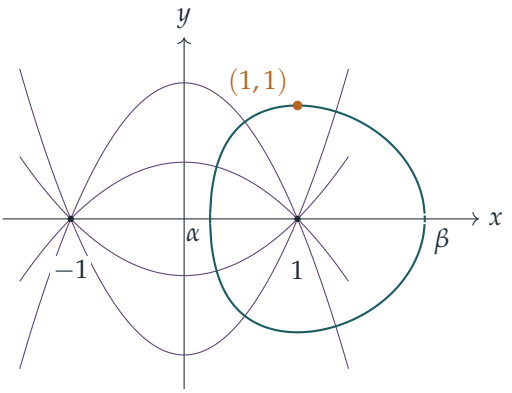
严格来说，微分方程通过 $(1,1)$ 的解是上半部分 $y = \sqrt{f(x) + \frac{3}{2}}$。它对 x 轴的反射同样与每条抛物线正交，所以自然的答案是整条闭曲线。

描绘曲线

实数点须满足 $f(x) \geq -\frac{3}{2}$。我们的第一幅略图显示，f 由 $-\infty$ 上升至 $x = 1$ 处的极大值 $-\frac{1}{2}$，然后再下降回 $-\infty$。所以 $f(x) = -\frac{3}{2}$ 恰好有一个根 $\alpha \in (0,1)$ 和一个根 $\beta > 1$。数值上，$\alpha \approx 0.229$，$\beta \approx 2.123$。因此：

- 曲线位于带状区域 $\alpha \leq x \leq \beta$ 之内，并且对 x 轴对称；
- y^2 在 $x = 1$ 处最大，其值为 1，由此得到两点 $(1, \pm 1)$，该处的切线是水平的；
- 在 $(\alpha, 0)$ 和 $(\beta, 0)$ 处，我们有 $y^2 = 0$，而 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x = f'(x) \neq 0$，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 为无穷大，切线是垂直的。

所以这条曲线是一个不对称的闭合卵形：左边陡峭上升，右边则较平缓地下降。图中也画出了几条抛物线以作比较。



假如我们容许 $x < 0$，并把 $\ln x$ 换成 $\ln|x|$，同样的运算还会在左半平面得出一个镜像的卵形。那个卵形并不通过 $(1,1)$，所以不属于答案的一部分。

验算

- 在 $(1,1)$ 处，曲线的斜率为 $\frac{1-1}{2}=0$。没有任何抛物线通过 $(1,1)$ 这一点本身，因为每条抛物线与直线 $x=1$ 只相交于 $(1,0)$。在 $x=1$ 附近，抛物线几乎是垂直的，这与曲线上的水平切线吻合。
- 数值上，在 $x=0.5$ 处，曲线上 $y=\sqrt{\ln 0.5-0.125+1.5}\approx 0.826$，斜率为 $\frac{0.75}{2(0.5)(0.826)}\approx 0.908$。通过该点的抛物线的斜率为 $\frac{2(0.5)(0.826)}{-0.75}\approx -1.101$，而 $0.908\times(-1.101)\approx -1$。
- 我们在卵形上数千个随机点验证了正交性，并以二分法（bisection）计算出两个根 $\alpha\approx 0.2291$ 和 $\beta\approx 2.1226$。

常见错误

- 使用某一条固定抛物线的斜率，例如取特定 A 值的 $2Ax$，而不是通过一般点 (x,y) 的那条族中曲线的斜率。
- 忘记 $y^2=f(x)+\frac{3}{2}$ 需要 $f(x)\geq -\frac{3}{2}$，因而画出一条无界的曲线，而不是闭合的卵形。

STEP 之外

求一族曲线，使它与给定的曲线族成直角相交，这就是**正交轨线**（orthogonal trajectories）问题。在物理学中，它们以场线和等势线的形式出现，例如在静电学或二维流体流动之中。解析（analytic）复变函数的实部和虚部总会给出这样的两族曲线，这是通往保角映射（conformal mapping）的其中一条途径。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 涵盖可分离变量方程和正交轨线。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 则展示了复变量的图景。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。