详细解答

STEP III 2001，第 6 题

纯数学 · 向量与三角形的心

> **STEP III 2001，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q6

关键思路

一切都由平面的法向量（normal vector）$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ 决定：点 $\mathbf{r}$ 位于平面上，当且仅当 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 1$，而由 O 和 M 所作的垂线都沿 $\mathbf{n}$ 的方向。垂心（orthocentre）和外心（circumcentre）来自两项立体几何事实：OA、OB、OC 两两互相垂直；而 M 是以 OA、OB、OC 为棱的长方体的中心，所以它与 O、A、B、C 等距。至于最后一部分，两条垂线互相平行，因此只需一对相似三角形（或一行向量代数）便可完成余下的工作。

解答

全题中 a、b、c 均不为零（否则平面不会与三条坐标轴都相交），所以

$$A = (a,0,0), \qquad B = (0,b,0), \qquad C = (0,0,c),$$

并记 $S = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = |\mathbf{n}|^2 > 0$。

形心

直线 OM 上的点是 $t\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$。代入平面方程得 $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 1$，所以 $t = \frac{2}{3}$，交点为

$$G = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{1}{3}b, \tfrac{1}{3}c\right) = \tfrac{1}{3}(A + B + C),$$

这正是三角形 ABC 的形心（centroid）。留意 $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$，稍后会用到。

由 O 所作的垂线：垂心

由 O 所作的垂线是直线 $\lambda\mathbf{n}$。它与平面相交于 $\lambda\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$ 之处，即 $\lambda=1/S$，交点为

$$H=\frac{1}{S}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right).$$

我们证明 $AH\perp BC$。利用 $\overrightarrow{BC}=(0,-b,c)$，

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{aS}-a\right)\cdot 0+\frac{1}{bS}\cdot(-b)+\frac{1}{cS}\cdot c=-\frac{1}{S}+\frac{1}{S}=0.$$

想一想 这个点积（dot product）是否有理由必定为零，而不只是碰巧如此?

有的。BC 位于该平面上，所以它垂直于法线 OH；而 BC 又位于 yz 平面上，所以它垂直于沿 x 轴的 OA。一条直线若垂直于两条不平行的直线 OA 和 OH，便垂直于整个平面 OAH，当然也垂直于 AH。

把字母轮换，用同样的论证可得 $BH\perp CA$ 和 $CH\perp AB$。由于 H 位于三角形所在的平面上，$AH\perp BC$ 即表示 H 在由 A 所作的高（altitude）上，另外两条高亦同理。所以 H 是三角形 ABC 的垂心。

由 M 所作的垂线：外心

由 M 所作的垂线是 $M+\mu\mathbf{n}$。它与平面相交于 $\frac{3}{2}+\mu S=1$ 之处，所以 $\mu=-\dfrac{1}{2S}$，交点为

$$P=M-\frac{1}{2S}\,\mathbf{n}.$$

现在，M 与 O、A、B、C 四点全部等距：例如

$$MA^2=\left(\tfrac{1}{2}a-a\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}b\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}c\right)^2=\tfrac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

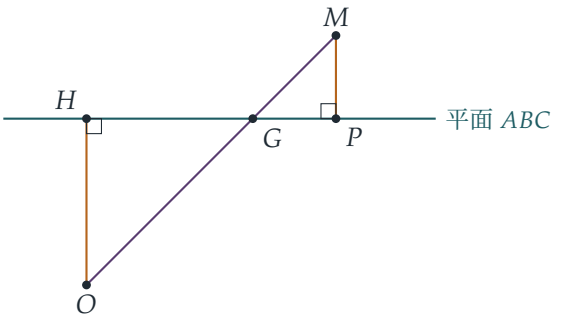
而根据对称性，MB^2、MC^2（以及 MO^2）都得出相同的值。由于 MP 垂直于平面而 PA 位于平面上，三角形 MPA 在 P 处有一直角，所以根据毕氏定理（Pythagoras' theorem）

$$PA^2=MA^2-MP^2,$$

同样地 $PB^2=MB^2-MP^2$ 及 $PC^2=MC^2-MP^2$。各式右方相等，所以 $PA=PB=PC$。平面上与三个顶点等距的点只有外心，所以 P 是三角形 ABC 的外心。

最后一部分

垂线 OH 和 MP 都平行于 $\mathbf{n}$，所以 O、H、M、P 位于同一平面上，而直线 OM 在 G 处穿过三角形所在的平面。此外，O 和 M 分别位于三角形所在平面的两侧，因为 $O\cdot\mathbf{n}=0<1$ 而 $M\cdot\mathbf{n}=\frac{3}{2}>1$。以下是通过这四点的截面：



三角形 OHG 和 MPG 分别在 H 和 P 处有直角，在 G 处的对顶角亦相等，所以两者相似（similar），比为 $OG : GM = 2 : 1$。因此 $HG : GP = 2 : 1$，而且 G 位于线段 HP 上。

同一结论也可直接由向量得出。以 $H = \frac{1}{S}\mathbf{n}$、$P = M - \frac{1}{2S}\mathbf{n}$ 及 $G = \frac{2}{3}M$ 代入，

$$\tfrac{1}{3}(H + 2P) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{S}\mathbf{n} + 2M - \tfrac{1}{S}\mathbf{n}\right) = \tfrac{2}{3}M = G.$$

所以 G 位于由垂心 H 至外心 P 的线段上，并把它按 $HG : GP = 2 : 1$ 的比分割，正如题目所求。（若三角形是等边三角形，则 $H = P = G$，无需证明。）

? **想一想** 这是否已为每一个三角形证明了这个结果?

并不尽然。要令这个论证适用，三角形必须与某个上述类型的三角形 ABC 全等（congruent）。这时它的边满足 $BC^2 = b^2 + c^2$、$CA^2 = c^2 + a^2$ 及 $AB^2 = a^2 + b^2$，所以

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2a^2 > 0,$$

在 B 和 C 处亦同理。根据余弦定理（cosine rule），每个角都是锐角。反过来说，任何锐角三角形都可以这样实现：由这三条方程解出 a^2、b^2、c^2，它们全是正数。所以这个方法为锐角三角形证明了结果。至于直角或钝角三角形，以下是一个简短的平面论证，可涵盖所有情况。把外心置于原点，则顶点 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的长度全部相同。设 $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$。那么

$$(\mathbf{h} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$

所以 $\mathbf{h}$ 在由 $\mathbf{a}$ 所作的高上，根据对称性亦在另外两条高上：它就是垂心。形心是 $\frac{1}{3}\mathbf{h} = \frac{1}{3}(\mathbf{h} + 2 \cdot \mathbf{0})$，这正是同一个 $2 : 1$ 的结论。

验算

取 $a = 1$、$b = c = 2$，则 $S = \frac{3}{2}$。于是 $H = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$、$P = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ 及 $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$。各点均满足 $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1$。你可以验证 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 和 $PA^2 = PB^2 = PC^2 = \frac{25}{12}$，以及 $\frac{1}{3}(H + 2P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = G$。我们亦曾随机选取 3000 组正负皆有的 a、b、c，以精确算术验证了以上所有事实。

常见错误

- 只证明 $AH \perp BC$ 便停下来。你需要证明全部三条高，或清楚写明“根据对称性”。你还需要指出 H 位于三角形所在的平面上：平面以外的点也可以满足 $AH \perp BC$，却不在高上。
- 把比的次序弄反。形心与垂心的距离，是它与外心的距离的两倍。
- 声称“由此”（hence）的部分涵盖每一个三角形。如上文所示，它只适用于锐角三角形。

STEP 之外

通过垂心、形心和外心的直线称为欧拉线（Euler line）。$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$（以外心为原点）这个事实，是研究九点圆（nine-point circle）的起点；九点圆的圆心同样在欧拉线上，位于 H 与外心的正中间。把平面图形看成一个简单立体图形的截面，这种技巧在几何中屡见不鲜。考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（《几何学导论》），以及考克斯特与 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《几何学重温》），对欧拉线和九点圆都有精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。