详细解答

STEP III 2001，第 5 题

纯数学 · 抛物线的法线

> **STEP III 2001，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q5

关键思路

问有哪些法线（normal）通过定点 (h,k)，其实就是问一个以参数（parameter）t 为未知数的三次方程（cubic）有多少个实根。这个三次方程没有 t^2 项，所以它正好具有题目开首部分的形式 t^3+pt+q。实根的数目只会在两个根合并成重根（repeated root）时才改变，因此“一条法线”与“三条法线”之间的分界，就是该三次方程有重根之处。这条分界正是我们要找的轨迹（locus）。

解答

三次方程

设 $f(x)=x^3+px+q$。当 $p\geq 0$ 时，对所有 x 都有 $f'(x)=3x^2+p\geq 0$，而 $f'(x)=0$ 最多只会在 $x=0$ 这一点出现（且仅当 $p=0$ 时）。所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增（strictly increasing）：若 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x>0$，因为被积函数（integrand）非负，而且最多只在一点为零。

此外，当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$。由于 f 连续（continuous），它必在某处取值 0；又因为它严格递增，所以只会取这个值一次。因此方程恰有一个实数解。

通过 (h,k) 的法线

在 C 上，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{2a}{2at}=\dfrac{1}{t}$，所以在参数为 t 的点上，法线的斜率（gradient）是 $-t$。（这在 $t=0$ 时同样成立：该处的切线（tangent）是铅垂的，而法线就是 x 轴。）法

线的方程是

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{即} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

它通过 (h,k)，当且仅当 $k + th = 2at + at^3$，即

$$\boxed{at^3 + (2a - h)\,t - k = 0} \qquad \text{或者，两边同除以} a > 0, \qquad t^3 + \frac{2a-h}{a}\,t - \frac{k}{a} = 0.$$

想一想 两个不同的 t 值会否给出同一条法线，以致数根的数目时把法线多算了？

不会。在 t 处的法线斜率是 $-t$，所以不同的 t 值给出斜率不同的法线，它们是不同的直线。因此，通过 (h,k) 的法线数目，正好等于该三次方程相异实根的数目。

若 $h \le 2a$，则系数 $p = \dfrac{2a-h}{a}$ 为 ≥ 0，所以由第一部分可知，该三次方程恰有一个实根。因此恰有一条 C 的法线通过 (h,k)，这正是所要证明的。

恰有两条法线通过的点的轨迹

把三次方程写成 $t^3 + Pt + Q = 0$，其中 $P = \dfrac{2a-h}{a}$，$Q = -\dfrac{k}{a}$。实系数三次方程的实根，按重数（multiplicity）计算，不是一个就是三个。所以它恰有两个相异实根，当且仅当它有一个二重根（double root）s 和另一个与之不同的单根（simple root）。

由于没有 t^2 项，各根之和为 0，所以单根是 $-2s$。我们需要 $s \neq 0$，才能保证 $-2s \neq s$。比较系数，

$$t^3 + Pt + Q = (t-s)^2(t+2s) = t^3 - 3s^2 t + 2s^3,$$

所以 $P = -3s^2$ 及 $Q = 2s^3$。换回原来的变量：

$$h = 2a + 3as^2, \qquad k = -2as^3, \qquad s \neq 0.$$

要消去 s，留意 $(h-2a)^3 = 27a^3s^6$ 及 $k^2 = 4a^2s^6$，所以 $4(h-2a)^3 = 108a^3s^6 = 27a\,k^2$。

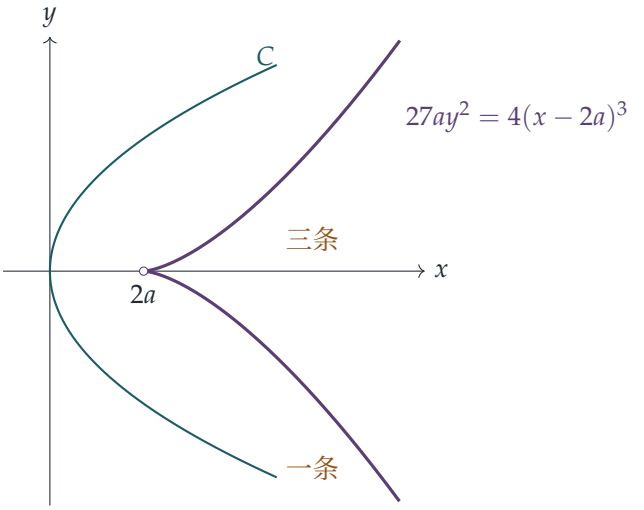
反过来，假设 $27ak^2 = 4(h-2a)^3$，且 $(h,k) \neq (2a,0)$。那么 $h - 2a \ge 0$，而事实上 $h > 2a$（若 $h = 2a$ 则 $k = 0$）。设 s 为满足 $2as^3 = -k$ 的实数。那么 $4a^2s^6 = k^2 = \frac{4}{27a}(h-2a)^3$，所以 $(h-2a)^3 = (3as^2)^3$，因而 $h - 2a = 3as^2$。所以 (h,k) 具有上述形式，其中 $s \neq 0$，并且恰有两条法线通过它。（这等价于重根条件 $4P^3 + 27Q^2 = 0$。）

点 $(2a,0)$ 本身要排除。在该处 $P = Q = 0$，三次方程是 $t^3 = 0$，有一个三重根（triple root），只有一条法线（即 x 轴）通过该点。

所以所求的轨迹是

$$\boxed{27a\,y^2 = 4\,(x-2a)^3}, \qquad \text{不包括点} (2a,0).$$

这是一条半立方抛物线（semicubical parabola），在 $(2a,0)$ 处有一个尖点（cusp），关于 x 轴对称，并位于 $x \geq 2a$ 的范围内，其中 $y = \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3a}}(x-2a)^{3/2}$。在它的内部（即包含正 x 轴上 $2a$ 以外部分的区域），三次方程有三个相异实根，所以每一点都有三条法线通过。在它的外部，则只有一条法线通过。



此草图取 $a = 1$。空心圆圈标示被排除的尖点，而图中的标签则表示通过各区域内的点的法线数目。

验算

- 取 $a = 1$ 及 $s = 1$，得出点 $(5,-2)$。三次方程是 $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$，所以在 $(1,2)$ 和 $(4,-4)$ 处的法线都通过 $(5,-2)$。事实上，在 $t = 1$ 处的法线是 $y + x = 3$，而在 $t = -2$ 处的法线是 $y - 2x = -12$。两者都包含 $(5,-2)$，而且 $27 \cdot 4 = 108 = 4 \cdot 27$。
- 在 $(5, 0.1)$（取 $a = 1$），$4P^3 + 27Q^2 = -108 + 0.27 < 0$，得出三条法线。在 $(5,4)$，其值为 $-108 + 432 > 0$，得出一条法线。这与草图吻合。
- 我们以数百个随机例子，用数值方法检验了法线方程以及各个“只有一个根”的结论。

常见错误

- 忘记排除尖点 $(2a,0)$。该点满足方程，但只有一条法线通过。
- 声称当 $p \geq 0$ 时 $f'(x) > 0$。当 $p = 0$ 时，$f'(0) = 0$，所以需要用稍强一点的论证，说明 f 仍然严格递增。

▶ 把法线的斜率写成 $1/t$（那是切线的斜率），而不是 $-t$。

STEP 之外

这条轨迹是抛物线的*渐屈线*（evolute）：即其曲率中心（centre of curvature）所描出的曲线，同时也是其法线的包络线（envelope）。越过渐屈线时，通过一点的法线数目会改变两条，这是突变理论（catastrophe theory）和三次方程判别式（discriminant）背后思想的一个入门例子。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 收录了更多同类的 STEP 题目。Bruce 与 Giblin 的 *Curves and Singularities* 则严谨而有系统地阐述渐屈线和包络线。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。