详细解答

STEP III 2001，第 4 题

纯数学 · 反三角函数

STEP III 2001，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s3-q4

关键思路

看到 $\dfrac{2x}{1+x^2}$ 这个式子，应该马上有所联想：当 $x=\tan\theta$ 时，它正是 $\sin 2\theta$ 的“t 公式”（t-formula）。代入 $x=\tan\theta$ 之后，这个式子的 $\sin^{-1}$ 就变成 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$，于是整道题就化为：$\sin^{-1}(\sin\phi)$ 在甚么时候真的会还原为 ϕ？答案取决于 ϕ 是否落在主值范围（principal range）$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 之内，而在 $x=\pm 1$ 处要分段处理，原因正在于此。

解答

第 (i) 部分

先看 $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的一些基本性质。

- 分母永不为零，所以 g 在整条实数线上都有定义，而且处处连续（continuous）。
- $g(-x)=-g(x)$，所以 g 是奇函数（odd function），其图像关于原点旋转对称。
- $g(0)=0$；$g(x)$ 与 x 同号；而且当 $x\to\pm\infty$ 时 $g(x)\to 0$，因为分母的增长与 x^2 同阶，而分子只与 x 同阶。所以 x 轴是渐近线（asymptote）：当 $x\to\infty$ 时图像从上方趋近，当 $x\to-\infty$ 时从下方趋近。

由商法则（quotient rule），

$$g'(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

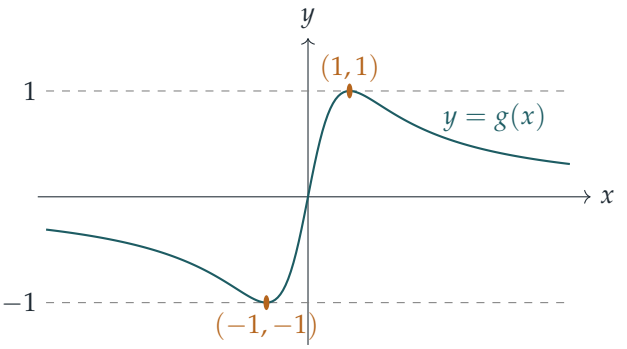
它只在 $x=\pm 1$ 处为零。当 $|x|<1$ 时它是正数，当 $|x|>1$ 时是负数，所以 $x=1$ 给出极大值 $g(1)=1$，$x=-1$ 给出极小值 $g(-1)=-1$。在原点的斜率（gradient）是 $g'(0)=2$。

不用微积分，也可以确认这两个转向点（turning points）给出的是全局的最大值和最小值：

$$1-g(x)=\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\geq 0,\qquad 1+g(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\geq 0,$$

所以对所有 x 都有 $-1\leq g(x)\leq 1$，等号只在 $x=\mp 1$ 时成立。由于 g 连续，并且取到 -1 和 1 这两个值，所以它取遍两者之间的每一个值（根据介值定理（intermediate value theorem））。因此

函数g 的值域（range）为 $-1\leq g(x)\leq 1$.



第 (ii) 部分

由第 (i) 部分，$\frac{2x}{1+x^2}$ 总是落在 $[-1,1]$ 之内，而这正是 $\sin^{-1}$ 的定义域（domain），所以 f 对每个实数 x 都有定义。

设 $\theta=\tan^{-1}x$，即 $x=\tan\theta$，其中 $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$。那么

$$\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta,$$

所以

$$f(x)=\sin^{-1}(\sin 2\theta).$$

想一想 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$ 不就是 2θ 吗?

只有当 2θ 落在 $\sin^{-1}$ 的值域，即 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之内时才是如此。按定义，$\sin^{-1}y$ 是该区间内正弦值等于 y 的唯一一个角。所以要求 $f(x)$，就必须在 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 内找出与 2θ 正弦值相同的那个角。

情况 $-1\leq x\leq 1$。由于 tan 在 $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上递增，这表示 $-\frac{1}{4}\pi\leq\theta\leq\frac{1}{4}\pi$，所以 $-\frac{1}{2}\pi\leq 2\theta\leq\frac{1}{2}\pi$。这时 2θ 本身就是主值范围内正弦值为 $\sin 2\theta$ 的角，所以

$$f(x)=2\theta=2\tan^{-1}x\qquad(-1\leq x\leq 1).$$

情况 $x \geq 1$。这时 $\frac{1}{4}\pi \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\frac{1}{2}\pi \leq 2\theta < \pi$，已经超出主值范围。不过

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta \qquad 及 \qquad 0 < \pi - 2\theta \leq \tfrac{1}{2}\pi,$$

所以 $\pi - 2\theta$ 就是主值范围内正弦值相符的那个角。因此

$$f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 2\tan^{-1} x \qquad (x \geq 1).$$

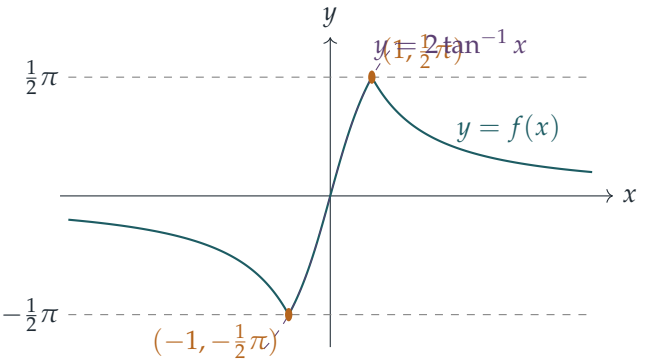
在 $x = 1$ 处，两条公式都给出 $\frac{1}{2}\pi$，这是理所当然的。至此，题目中“证明”（show that）的部分已经完成。

要画出图像，我们还需要知道 $x \leq -1$ 的情况。由于 g 是奇函数，$\sin^{-1}$ 也是奇函数，所以 f 是奇函数，于是当 $x \leq -1$ 时 $f(x) = -f(-x) = -\pi - 2\tan^{-1} x$。（也可以这样看：这时 $-\pi < 2\theta \leq -\frac{1}{2}\pi$，而 $-\pi - 2\theta$ 就是 $[-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 内正弦值相同的那个角。）

图像的形状。

- 在 $[-1, 1]$ 上，$f(x) = 2\tan^{-1} x$ 由 $-\frac{1}{2}\pi$ 递增至 $\frac{1}{2}\pi$，并以斜率 2 通过原点。
- 当 $x \geq 1$ 时，$f(x) = \pi - 2\tan^{-1} x$ 由 $\frac{1}{2}\pi$ 开始递减，并且当 $x \to \infty$ 时从上方趋向 $\pi - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$。由奇函数的性质，当 $x \leq -1$ 时，随着 $x \to -\infty$，它由 $-\frac{1}{2}\pi$ 上升，从下方趋向 0。所以 x 轴同样是渐近线。
- 当 $|x| < 1$ 时斜率是 $\dfrac{2}{1+x^2}$，当 $|x| > 1$ 时斜率是 $-\dfrac{2}{1+x^2}$。在 $x = 1$ 处，斜率由 $+1$ 跳到 -1（在 $x = -1$ 处情况类似），所以图像在 $(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pi)$ 处有尖角：f 在该处连续，但不可微（not differentiable）。

这些尖角可以直接从连锁律（chain rule）看出来：$f'(x) = g'(x)/\sqrt{1 - g(x)^2}$，而第 (i) 部分已给出 $1 - g^2 = (1-x^2)^2/(1+x^2)^2$，它的平方根是 $|1-x^2|/(1+x^2)$。所以 $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} = \pm\dfrac{2}{1+x^2}$，正负号与 $1 - x^2$ 相同。



虚线显示 $2\tan^{-1} x$ 越过 $x = 1$ 之后继续延伸的样子：它会升到 $\frac{1}{2}\pi$ 以上，而 $\sin^{-1}$ 的值永远不可能这样，所以 f 改为向下“反射”回来。

验算

- 在 $x=\sqrt{3}$ 处：$g(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $f(\sqrt{3})=\frac{1}{3}\pi$；而公式给出 $\pi-2\cdot\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi$。两者相符。
- 在 $x=10$ 处：$f(10)=\sin^{-1}(20/101)\approx 0.19934$，而 $\pi-2\tan^{-1}10\approx 0.19934$。用电脑在 $[-1,1]$、$[1,10^4]$ 和 $[-10^4,-1]$ 这三个区间内各随机测试 10^5 个 x 值，结果两者相符至 10^{-7} 以内，而在 $x=1$ 处的两个单侧斜率则分别算得 $+1$ 和 -1。
- 假如 f 处处都等于 $2\tan^{-1}x$，那么当 x 很大时它会接近 π，而 $\sin^{-1}$ 的值不可能这样；反射正好解决了这个问题。

常见错误

- 没有检查 2θ 是否在 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之内，就写下 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)=2\theta$。
- 把 f 在 $x=1$ 处画成平滑的圆顶。图像在该处其实有一个尖角，因为 $\sqrt{1-g^2}$ 涉及的是 $|1-x^2|$，而不是 $1-x^2$。
- 忘记当 $x\to\pm\infty$ 时 f 趋向 0（而不是 $\pm\pi$）。

STEP 之外

反三角函数(inverse trigonometric functions)是选取分支(branch)的第一个例子：sin 不是一对一(one-to-one)的，所以在求反函数之前必须先限制它的定义域，而像 $\sin^{-1}(\sin\phi)=\phi$ 这样的恒等式，也就只在该分支上成立。同样的问题在复分析（complex analysis）中成为核心课题，在那里 $\log z$ 和 $z^{1/2}$ 都需要分支切割（branch cuts）。$x=1$ 处的尖角也是一个精巧的例子：一个由平滑的片段拼合而成的函数，可以在某一点连续却不可微。想了解分支和多值函数（multi-valued functions），并看到大量图解，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像讲解复分析）；至于连续性和可微性，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。