详细解答

STEP III 2001，第 3 题

纯数学 · 二次方程的根

> **STEP III 2001，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q3

关键思路

把关于根(root)的叙述转化为关于系数(coefficient)的叙述。设两根为 α 和 β，则 $\alpha+\beta=b$ 且 $\alpha\beta=c$，而判别式（discriminant）可告诉我们两根何时为实数。至于第 (ii) 部分，从 $f(x)=x^2-bx+c$ 的图像入手会较为容易：两根都严格介乎 -1 与 1 之间，当且仅当抛物线（parabola）在 ±1 处取正值，且其顶点（vertex）位于两者之间。

解答

以下一律记 $f(x)=x^2-bx+c$；当两根为实数时，称之为 $\alpha\le\beta$，于是

$$\alpha+\beta=b,\qquad \alpha\beta=c,\qquad \alpha,\beta=\tfrac{1}{2}(b\mp\sqrt{b^2-4c}).$$

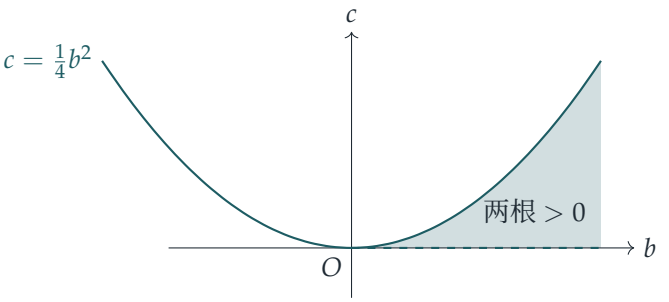
重根（repeated root）视作两个相等的实根。

第 (i) 部分

($\Rightarrow$) 假设两根皆为正实数。有实根便须 $b^2-4c\ge0$。又因两根皆为正数，故 $b=\alpha+\beta>0$ 且 $c=\alpha\beta>0$。合起来便得 $b>0$ 及 $b^2\ge4c>0$。

($\Leftarrow$) 假设 $b>0$ 且 $b^2\ge4c>0$。由于 $b^2-4c\ge0$，两根为实数。由于 $\alpha\beta=c>0$，两根均不为零且同号。由于 $\alpha+\beta=b>0$，这个共同的符号不可能是负号。所以两根皆为正数。

这就证明了两者等价。在 b-c 平面上，这些条件即 $b>0$ 及 $0<c\le\frac{1}{4}b^2$：也就是第一象限（first quadrant）内介乎正 b 轴与抛物线 $c=\frac{1}{4}b^2$ 之间的区域。抛物线包括在内（重根 $\frac{1}{2}b>0$），而 b 轴则不包括在内（该处 $c=0$，其中一根为 0）。



实线曲线（$b > 0$ 的部分）属于该区域；b 轴上的虚线线段和原点则不属于该区域。

第 (ii) 部分

我们需要两根皆为实数，且 $-1 < \alpha \leq \beta < 1$。我们断言：在两根为实数的前提下，这情况成立当且仅当

$$f(1) = 1 - b + c > 0, \qquad f(-1) = 1 + b + c > 0, \qquad -1 < \tfrac{1}{2}b < 1.$$

($\Rightarrow$) 若 $-1 < \alpha \leq \beta < 1$，则 $f(1) = (1-\alpha)(1-\beta) > 0$ 且 $f(-1) = (1+\alpha)(1+\beta) > 0$，因为每个括号内的数都是正数。此外，$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ 是 $(-1, 1)$ 内两个数的平均值，所以它也在 $(-1, 1)$ 内。

($\Leftarrow$) 因为 $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ 恰好在 $[\alpha, \beta]$ 上 ≤ 0，所以条件 $f(1) > 0$ 表示 1 不在 $[\alpha, \beta]$ 内。因此要么 $1 < \alpha$，要么 $1 > \beta$。顶点 $\frac{1}{2}b$ 位于 $[\alpha, \beta]$ 内，而 $\frac{1}{2}b < 1$，故 $\alpha \leq \frac{1}{2}b < 1$。这就排除了 $1 < \alpha$，所以 $\beta < 1$。同理，由 $f(-1) > 0$ 和 $\frac{1}{2}b > -1$ 可得 $\alpha > -1$。

? **想一想** 为甚么不能只用 $f(1) > 0$ 和 $f(-1) > 0$ 这两个条件?

因为两根有可能都落在区间的同一侧。例如 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根是 2 和 3，但 $f(\pm 1) > 0$。正是顶点条件 $|b| < 2$ 令两根落在 -1 与 1 之间，而不是同时落在某一端之外。

把这些条件与实根条件 $b^2 \geq 4c$ 合并，所求区域为

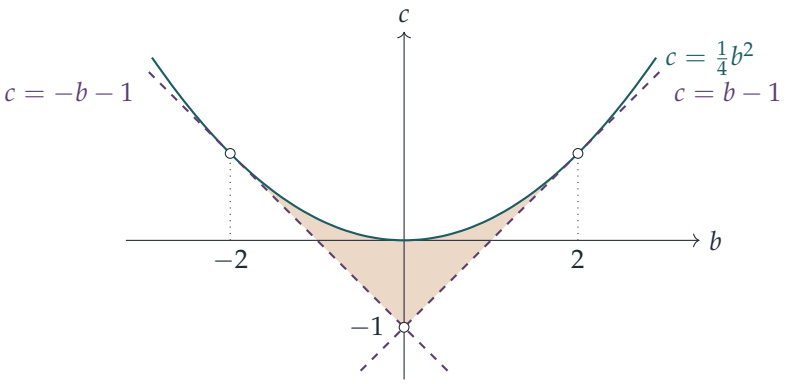
$$|b| < 2, \qquad c > b - 1, \qquad c > -b - 1, \qquad c \leq \tfrac{1}{4}b^2,$$

即 $|b| < 2$ 且 $|b| - 1 < c \leq \frac{1}{4}b^2$。

绘画草图时，要留意两条直线与抛物线如何相交。由于

$$\tfrac{1}{4}b^2 - (b-1) = \tfrac{1}{4}(b-2)^2 \geq 0,$$

直线 $c = b - 1$ 位于抛物线下方，且只在 $(2, 1)$ 与它相接。所以它就是抛物线在该点的切线 (tangent)。根据对称性 ($b \mapsto -b$)，$c = -b - 1$ 是在 $(-2, 1)$ 的切线。两条直线相交于 $(0, -1)$。所求区域是一个曲边三角形，由这两条切线和抛物线在两个切点之间的弧围成。



抛物线上 $|b| < 2$ 的弧包括在内（重根 $\frac{1}{2}b$，且 $|\frac{1}{2}b| < 1$）。两段虚线切线不包括在内，因为在它们上面有一根为 ± 1。三个角点 $(\pm 2, 1)$ 和 $(0, -1)$ 同样不包括在内。

验算

- $(b, c) = (0, -\frac{1}{4})$ 在第 (ii) 部分的区域之内：两根为 $\pm\frac{1}{2}$。$(b, c) = (0, -1)$ 是被排除的角点：两根恰好是 ± 1。
- $(b, c) = (2.7, 1.8)$ 满足 $c > |b| - 1$ 和 $c \leq \frac{1}{4}b^2$，但 $|b| > 2$。它的两根是 1.2 和 1.5，所以顶点条件把它排除在外是正确的。
- 我们以数值方法检验了两个区域：在超过 115 000 个有理点 (b, c) 上，把准确的根与所述条件互相比较，当中包括每条边界曲线上的点。结果完全吻合。

常见错误

- 在第 (ii) 部分遗漏顶点条件 $|b| < 2$，以致错误地加入了 $|b| = 2$ 以外、夹在每条切线与抛物线之间的狭长部分。
- 弄错边界：两部分的区域都包括抛物线，但第 (i) 部分的 b 轴和第 (ii) 部分的切线都不包括在内。

STEP 之外

关于 $f(\pm 1)$ 和顶点的条件，其实是一个一般问题的小特例：多项式（polynomial）的所有根何时都落在某个指定区域之内？对于单位圆盘（unit disc），答案由 Schur–Cohn 判别法（Schur–Cohn test）给出。对于左半平面（left half-plane），答案则是 Routh–Hurwitz 判据（Routh–Hurwitz criterion），控制工程师用它来判断一个系统是否稳定。第 (ii) 部分

的区域，正是递推关系（recurrence）$u_{n+2} = bu_{n+1} - cu_n$ 在特征根（characteristic root）为实数时的稳定区域。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一书中有更多同类的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。