详细解答

STEP III 2001，第 2 题

纯数学 · 双曲代换与面积

STEP III 2001，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s3-q2

关键思路

两个不等式说的都是“留在某条等轴型双曲线（rectangular-type hyperbola）的其中一侧”，所以第一步是画出这两条双曲线的草图，并找出它们的交点。结果发现，所求区域是一块有界、具四重对称性的范围，而它的面积可写成两个形如 $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x$ 的积分。这类积分正好可用双曲代换（hyperbolic substitution）来处理，而题目的第一部分，就是为了让我们把所得的 $\cosh^{-1}$（以及 $\sinh^{-1}$）的值化为对数。

解答

$\cosh^{-1} x$ 的对数形式

设 $x \geq 1$，并设 $y = \cosh^{-1} x$；按定义，它是满足 $\cosh y = x$ 的 非负数。于是

$$x = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} + 1 = 0,$$

这是一条以 e^{y} 为未知数的二次方程（quadratic），所以

$$\mathrm{e}^{y} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

? **想一想** 应该取哪一个符号？为甚么？

两个根的积是 1（即二次方程的常数项），而取正号的根至少是 1。因此取负号的根至多是 1，这会得出 $y \leq 0$。由于 $y \geq 0$，我们必须取正号（当 $x = 1$ 时，两个根本来就相等），所以

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

这正是所要证明的结果。以 $x = \sinh y$ 作完全相同的论证，可得 $\mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} - 1 = 0$；这次两个根的积是 -1，所以只有取正号的根是正数，于是 $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$。这两条公式稍后都会用到。

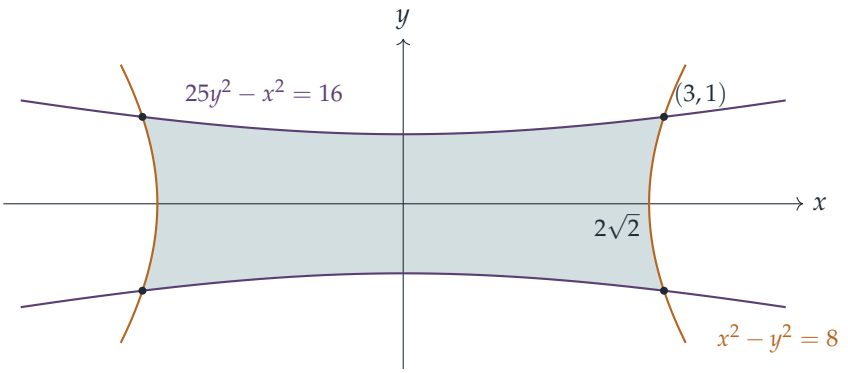
区域

把两个不等式改写为

$$x^2 - y^2 \le 8 \qquad 及 \qquad 25y^2 - x^2 \le 16.$$

曲线 $x^2 - y^2 = 8$ 是一条双曲线，两支分别向左、向右开口，并通过 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$；第一个不等式要求我们留在它的两支之间，即 $|x| \le \sqrt{y^2+8}$。曲线 $25y^2 - x^2 = 16$ 是一条双曲线，两支分别向上、向下开口，并通过 $(0, \pm\frac{4}{5})$；第二个不等式要求我们留在这两支之间，即 $|y| \le \frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$。

两条曲线相交之处满足 $x^2 = y^2 + 8$ 及 $25y^2 = x^2 + 16 = y^2 + 24$，所以 $y^2 = 1$ 及 $x^2 = 9$：交点就是 $(\pm 3, \pm 1)$ 这四点。



这个区域（图中阴影部分）是有界的：若 (x, y) 在区域内，则 $x^2 \le y^2 + 8 \le \frac{1}{25}(x^2+16) + 8$，所以 $x^2 \le 9$，继而 $y^2 \le \frac{25}{25} = 1$。两个不等式在 $x \mapsto -x$ 及 $y \mapsto -y$ 之下都保持不变，所以区域对两条坐标轴都对称，其面积是第一象限（first quadrant）内那部分的面积 A 的四倍。

在第一象限内，我们沿垂直方向切割。

- 当 $0 \le x \le 2\sqrt{2}$ 时，我们有 $x^2 - 8 \le 0 \le y^2$，所以第一个不等式自动成立，而 y 由 0 上升至 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$。
- 当 $2\sqrt{2} \le x \le 3$ 时，y 由 $\sqrt{x^2-8}$ 上升至 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$（而根据交点的计算，下方的曲线位于上方的曲线之下，当且仅当 $x^2 \le 9$）。

因此

$$A = \frac{1}{5}\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x \;-\; \int_{2\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}I_1 - I_2.$$

第一个积分

代入 $x = 4\sinh s$，于是 $\mathrm{d}x = 4\cosh s\,\mathrm{d}s$ 及 $\sqrt{x^2+16} = 4\cosh s$（是正数，因为 $\cosh s > 0$）。积分上下限是 $s = 0$ 及 $s = S = \sinh^{-1}\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \ln 2$。利用 $\cosh^2 s = \frac{1}{2}(\cosh 2s + 1)$，

$$I_1 = \int_0^S 16\cosh^2 s\,\mathrm{d}s = \int_0^S 8(\cosh 2s + 1)\,\mathrm{d}s = \Big[8\sinh s\cosh s + 8s\Big]_0^S$$
$$= 8\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4} + 8\ln 2 = \tfrac{15}{2} + 8\ln 2,$$

因为 $\sinh S = \frac{3}{4}$ 及 $\cosh S = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$。

第二个积分

代入 $x = 2\sqrt{2}\cosh t$，其中 $t \geq 0$，于是 $\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$ 及 $\sqrt{x^2-8} = 2\sqrt{2}\sinh t$（是正数，因为 $t \geq 0$）。积分上下限是 $t = 0$ 及

$$t = T = \cosh^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{9}{8}-1}\right) = \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2,$$

这是由第一部分得出的。利用 $\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$，

$$I_2 = \int_0^T 8\sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^T 4(\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \Big[4\sinh t\cosh t - 4t\Big]_0^T$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} - 2\ln 2 = \tfrac{3}{2} - 2\ln 2,$$

因为 $\cosh T = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ 及 $\sinh T = \sqrt{\frac{9}{8}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$。

综合结果

$$A = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{15}{2} + 8\ln 2\right) - \left(\tfrac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{5}\ln 2 - \tfrac{3}{2} + 2\ln 2 = \tfrac{18}{5}\ln 2.$$

代数部分刚好完全抵销，而总面积是

$$4A = \frac{72}{5}\ln 2,$$

这正是所要证明的结果。

验算

- $\frac{72}{5}\ln 2 \approx 9.981$。对两个积分使用森逊法则（Simpson's rule），得出 $I_1 \approx 13.0452$ 及 $I_2 \approx 0.11371$，与 $\frac{15}{2} + 8\ln 2$ 及 $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ 吻合；另外，直接在一个细密的网格上数算同时满足两个不等式的点，得出的面积约为 9.98。

- 检查大小是否合理：这个区域可放进矩形 $[-3,3]\times[-1,1]$ 之内，该矩形的面积是 12，而区域只是欠缺了矩形四角几块细长的小片，所以面积略小于 10 是相当合理的。
- $\cosh^{-1}1=\ln 1=0$，与应有的结果一致。

常见错误

- 把不等式理解为双曲线“之外”：$y^2\geq x^2-8$ 是 $x^2-y^2=8$ 两支之间的区域，当中包含 y-轴。
- 忘记第一个不等式只在 $x>2\sqrt{2}$ 时才起作用，因而减去 $\int_0^3\sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x$，而这个积分甚至不是实数。
- 在 $\mathrm{e}^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$ 中取负号，这样得出的是 $-\cosh^{-1}x$。

STEP 之外

$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$ 这两类积分可用双曲代换处理，道理与 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 可用 $x=a\sin\theta$ 处理一样：恒等式 $\cosh^2-\sinh^2=1$ 能消去平方根。事实上，双曲函数（hyperbolic functions）量度的是面积：$(\cosh t,\sinh t)$ 中的参数 t 是单位双曲线上扇形面积的两倍，正如 θ 是圆扇形面积的两倍。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）还有很多这类风格的题目，而 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析导论）则说明指数函数、对数函数以至双曲函数，如何建立在严格的基础之上。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。