详细解答

STEP III 2001，第 13 题

概率与统计 • 硬币序列游戏

STEP III 2001，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s3-q13

本题在 *Beyond STEP* 第 12.8 节 *Penney 游戏*中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/penney.html

关键思路

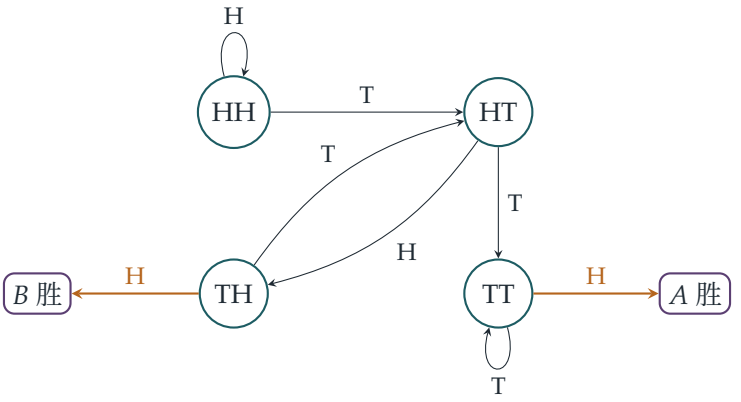
两个目标序列的长度都是三，所以没有人能在第三次掷币之前获胜；而从那时起，对往后有影响的就只有*最后两次掷币的结果*。这样便只有四个“状态”（state）（HH、HT、TH、TT），而以下一次掷币的结果作条件（conditioning），就可把这个游戏化为一个关于各状态下获胜概率的小型线性方程组。第 (ii) 和第 (iii) 部分也可以用同样的方法处理，不过在四场游戏之中，有两场用简短的直接论证会更快。

解答

在整个解答中，各次掷币互相独立（independent），每次出现 H 或 T 的概率均为 $\frac{1}{2}$。只要已经掷了最少两次而仍未有人获胜，下一次掷币连同最后两次的结果，就决定了此刻是否有人获胜；若没有，也决定了新的最后两次结果。更早的掷币结果并不相干，因为每个目标序列只有三个字母长。所以，从某一刻起获胜的概率只取决于最后两次掷币的结果，而且与把这两次当作一场新游戏的头两次掷币时的概率相同。

第 (i) 部分

设 p_{XY} 为已知头两次掷币结果是 XY 时，A（TTH）击败 B（THH）的概率。下图显示下一次掷币如何使我们在各状态之间转移。



为何 $p_{\mathrm{TT}} = 1$。假设最后两次掷币的结果是 TT。正面终会出现的概率为 1（连续出现 n 次反面的机会是 $2^{-n} \to 0$）。在正面出现之前，掷出的全是反面，所以 THH 不可能出现；而第一个正面之前最少有两个反面，所以它完成了 TTH。因此 A 必定获胜：$p_{\mathrm{TT}} = 1$。

为何 $p_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}$。在 HT 之后，HTH 和 HTT 都不是目标序列，所以没有人会在第三次掷币时获胜。若第三次是 H（概率为 $\frac{1}{2}$），最后两次的结果便是 TH；若是 T，则是 TT。以第三次掷币的结果作条件，并运用上文“只有最后两次掷币才有影响”这一点，

$$p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}.$$

其余两个状态。在 TH 之后，掷出正面便得 THH，B 获胜；掷出反面则变成 HT。在 HH 之后，掷出正面仍是 HH，掷出反面则变成 HT（而 HHH、HHT 在这里都不是目标序列）。所以

$$p_{\mathrm{TH}} = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}, \qquad p_{\mathrm{HH}} = \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HH}} + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}.$$

由第二条方程得 $p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}}$。把 $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$ 和 $p_{\mathrm{TT}} = 1$ 代入 p_{HT} 的方程，

$$p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{4}p_{\mathrm{HT}} + \tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{4}p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{2}{3}.$$

因此 $p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}} = \frac{2}{3}$，而 $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$，正如题目所求。

想一想 假如 TH 其实是在第 5 和第 6 次掷币时出现的，为何可以把游戏从 TH “重新开始”，当作 TH 就是头两次掷币的结果？

因为游戏往后的发展只取决于往后的掷币结果和最后两次掷币的结果：任何尚未完成的 TTH 或 THH，最多只能用到已掷出的最后两次结果。更早的历史对两个序列都没有帮助，而往后的掷币结果亦与它独立。

整体概率。没有人能在头两次掷币内获胜，而四种可能的组合各有 $\frac{1}{4}$ 的概率。根据全概率定理（law of total probability），

$$\mathrm{P}(A \text{ 胜}) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + 1\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

第 (ii) 部分

现在 B 的序列是 THH，C 的是 HHT。这里用直接论证最为简洁。

若头两次掷币的结果是 HH，则 C 获胜：其后出现的第一个反面（它出现的概率为 1）之前是 HH，于是完成了 HHT；而在它之前每次掷出的都是正面，所以 THH 不可能出现过。

否则头两次掷币之中有一个反面。HH 这个模式终会出现的概率为 1。考虑它第一次出现的位置。它并非由第 1 次掷币开始，所以紧接在它之前的一次掷币是存在的，而且结果不是 H（否则便有一个更早的 HH），所以是 T。于是第一个 HH 完成了一个 THH。同时，HHT 不可能在此之前出现，因为它需要一个更早的 HH。所以 B 获胜。

因此，除非头两次掷币的结果是 HH，否则 B 获胜：

$$\mathrm{P}(B\text{ 胜}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

第 (iii) 部分

C（HHT）对 D（HTT）。设 q_{XY} 为最后两次掷币结果是 XY 时 C 获胜的概率。由 HH 出发，C 必定获胜，理由与 (ii) 相同：第一个反面完成了 HHT，而 HTT 需要在 HT 之后再有一个反面，这不可能先出现。所以 $q_{\mathrm{HH}} = 1$。在其余各状态下以下一次掷币的结果作条件：

HT:	T 得 HTT（D 胜），H 得 TH:	$q_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{TH}}$,
TH:	H 得 HH，T 得 HT:	$q_{\mathrm{TH}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{HT}}$,
TT:	H 得 TH，T 得 TT:	$q_{\mathrm{TT}} = \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{TH}} + \tfrac{1}{2}q_{\mathrm{TT}}$.

由最后一条得 $q_{\mathrm{TT}} = q_{\mathrm{TH}}$。把第一条代入第二条，得 $q_{\mathrm{TH}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}q_{\mathrm{TH}}$，所以 $q_{\mathrm{TH}} = \tfrac{2}{3}$、$q_{\mathrm{TT}} = \tfrac{2}{3}$ 及 $q_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{3}$。因此

$$\mathrm{P}(C\text{ 胜}) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2},$$

所以 C 比 D 更有可能获胜。

D（HTT）对 A（TTH）。这与第 (ii) 部分互为镜像，只是 H 和 T 对调了。若头两次掷币的结果是 TT，则 A 获胜：第一个正面完成了 TTH，而 HTT 需要一个正面之后接两个反面，这不可能在那第一个正面之前发生。否则头两次掷币之中有一个正面。TT 这个模式终会出现的概率为 1；它第一次出现时并非由第 1 次掷币开始，而它之前的一次掷币不可能是 T（否则便有一个更早的 TT），所以是 H，于是第一个 TT 完成了 HTT。TTH 不可能在更早时出现，因为它需要一个更早的 TT。所以 D 获胜，而

$$\mathrm{P}(D\text{ 胜}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2}.$$

所以 D 比 A 更有可能获胜。

想一想 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 D，而 D 又胜 A。这怎么可能?

“较有可能击败”并不是一个传递关系（transitive relation），所以并无矛盾：四位玩家形成一个循环，A、B、C、D 在各自的对局中获胜的概率分别是 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$。后选的一方总可以挑一个能击败先选者的序列。

验算

- 在第 (i) 部分，代回验证：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2}{3}=p_{\mathrm{HT}}$，以及 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=p_{\mathrm{TH}}$。
- 状态法同样适用于第 (ii) 部分和 D–A 这场游戏：在 B 对 C 的游戏中，由 HH、HT、TH、TT 出发时 B 获胜的概率分别是 $0, 1, 1, 1$，平均值为 $\frac{3}{4}$。
- 为每组对局模拟 200 000 场游戏，所得的获胜频率为 0.664、0.752、0.666 和 0.749，而精确值是 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$。

常见错误

- 忘记游戏可以在第三次掷币时结束，例如写成 $p_{\mathrm{TH}}=\frac{1}{2}p_{\mathrm{HH}}+\frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$，而没有留意到 TH 之后掷出 H 就是 B 即时获胜。
- 把四个状态的概率取平均，却没有说明头两次掷币的每种组合概率均为 $\frac{1}{4}$，以及没有人能在第三次掷币之前获胜。

STEP 之外

这就是 Penney 游戏（Penney’s game），是非传递概率（non-transitive probabilities）的著名例子。状态法其实就是吸收马可夫链（absorbing Markov chains）的理论，当中的吸收概率所满足的，正是这里所解的那类线性方程。任意两个序列之间的胜负比（odds）甚至有一条闭合公式，即康威（Conway）的“领先数”（leading numbers）算法，可以用鞅（martingales）来证明。关于马可夫链和首步分析（first-step analysis），可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*，或 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。