详细解答

STEP III 2001，第 11 题

力学 · 转动能量守恒

STEP III 2001，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s3-q11

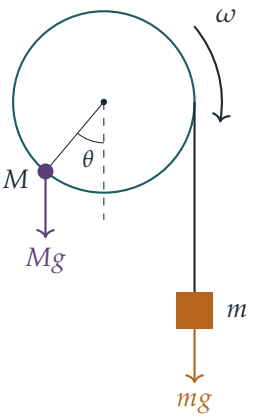
关键思路

整个系统都是光滑的（轮轴无摩擦，绳子是轻绳），所以机械能守恒（conservation of mechanical energy），只需一条能量方程便可把 ω 表示成 θ 的函数，完全不必考虑张力或其他力。圆柱体恰好在 ω^2 降至零时停下。于是第二部分变成关于单一个 θ 的函数的问题：悬挂质量所失去的势能（potential energy），必须始终大于质点所增加的势能。整理之后，这就是比较 m/M 与 $(1-\cos\theta)/\theta$ 的最大值，而求这个最大值并不困难。

解答

角速度

我们把 m 和 M 视为质点（particle），绳子视为不可伸长的轻绳（light and inextensible），且不在圆柱体上打滑，轮轴则视为光滑。设圆柱体沿着令 m 下降的方向转过角度 θ，并设 $\omega = \dot{\theta}$。



当圆柱体转过 θ 时，有长度为 $a\theta$ 的绳子松开，所以 m 下降了 $a\theta$，并以速率 $a\omega$ 运动。质点 M 位于圆柱体的边缘，所以它的速率也是 $a\omega$；它起初位于轴线下方深度 a 处，现在位于深度 $a\cos\theta$ 处，所以它上升了 $a(1-\cos\theta)$。

动能（kinetic energy）为

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}M(a\omega)^2 + \tfrac{1}{2}m(a\omega)^2 = \tfrac{1}{2}\big(I + (M+m)a^2\big)\omega^2.$$

光滑的轮轴不作功，而绳子既轻且不可伸长，传递能量时并无损耗。所以动能的增加等于势能的净减少：

$$\tfrac{1}{2}\big(I + (M+m)a^2\big)\omega^2 = mga\theta - Mga(1-\cos\theta),$$

由此得

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2ga\big(m\theta - M(1-\cos\theta)\big)}{I + (M+m)a^2}} \qquad \text{及} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2ga\big(m\theta - M(1-\cos\theta)\big)}{I + (M+m)a^2}}.$$

建模上有一点值得验证：绳子必须保持拉紧。把能量方程对时间求导，得 $\big(I + (M+m)a^2\big)\ddot{\theta} = ga(m - M\sin\theta)$，而张力（tension）为 $T = m(g - a\ddot{\theta})$。现在 $a\ddot{\theta} < g$ 等价于 $a^2(m - M\sin\theta) < I + (M+m)a^2$，即 $-Ma^2\sin\theta < I + Ma^2$，而这恒成立。所以在整个运动过程中 $T > 0$，能量方程对所有 θ 都有效。

永不停下

开始时，$\ddot{\theta} = gam/\big(I + (M+m)a^2\big) > 0$，所以圆柱体确实沿我们所选的方向开始转动。由于 ω 连续，它只有经过零才能改变正负号，所以只要对每个 $\theta > 0$ 都有 $\omega^2 > 0$，圆柱体便会永远转动下去。设 $k = m/M$，由 ω^2 的表达式可见，这种情况恰好在以下条件成立时出现：

$$k\theta > 1 - \cos\theta \quad \text{对所有} \theta > 0, \qquad \text{即} \qquad k > h(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta} \quad \text{对所有} \theta > 0.$$

所以我们需要求出 h 在 $\theta > 0$ 上的最大值。

驻点（stationary points）。我们有

$$h'(\theta) = \frac{\theta\sin\theta - (1-\cos\theta)}{\theta^2}.$$

利用 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 和 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$，

$$h'(\theta) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\left(\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta\right)}{\theta^2}.$$

在 $0 < \theta < \pi$ 上，$\sin\frac{1}{2}\theta$ 和 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 皆为正，所以 $h'(\theta)$ 的正负号与 $\theta - \tan\frac{1}{2}\theta$ 相同。设 $u(\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta - \theta$。那么 $u(0) = 0$，$u'(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta - 1$ 在 0 附近为负，而 $u''(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\theta > 0$，所以 u 在 $[0,\pi)$ 上是凸函数（convex function）。它先降至零以下，然后当 $\theta \to \pi$ 时趋向 $+\infty$。凸函数最多只能穿过零两次，所以 u 在 $(0,\pi)$ 内恰好有一个零点，那就是 α。因此 h 在 $(0,\alpha)$ 上递增，在 (α,π) 上递减。

> ? **想一想** h 在最大值处的值是多少？对于更大的 θ 又如何？

在 $\theta = \alpha$ 处，h' 的分子为零，所以 $1-\cos\alpha = \alpha\sin\alpha$，因此

$$h(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \sin\alpha.$$

对于 $\pi \le \theta \le 2\pi$，我们有 $\sin\frac{1}{2}\theta \ge 0$ 和 $\cos\frac{1}{2}\theta \le 0$，所以 $\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta \le 0$，从而 $h' \le 0$：h 一直递减至 2π，所以在 $(\alpha, 2\pi]$ 上 $h < \sin\alpha$。对于 $\theta > 2\pi$，$h(\theta) \le 2/\theta < 1/\pi$。最后，$u(\frac{3}{4}\pi) = \tan\frac{3}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi \approx 2.414 - 2.356 > 0$ 而 $u(\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi < 0$，所以 $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$，由此得 $\sin\alpha > \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\pi}$。所以 $\sin\alpha$ 是 h 在 $\theta > 0$ 上的最大值，而且只在 $\theta = \alpha$ 处取得。

结论。若 $m/M > \sin\alpha$，则对每个 $\theta > 0$，

$$m\theta - M(1-\cos\theta) = M\theta\big(k - h(\theta)\big) \ge M\theta(k - \sin\alpha) > 0,$$

所以对所有 $\theta > 0$ 都有 $\omega^2 > 0$，圆柱体会一直转动而不会停下，这正是所要证明的。

（反过来说，若 $m/M < \sin\alpha$，则在 $\theta = \alpha$ 处 $\omega^2 < 0$，所以 ω 在此之前已降至零，圆柱体会停下并往回摆动。在临界情况 $m/M = \sin\alpha$ 下，系统会缓缓趋近平衡位置 $\theta = \alpha$，却永远不会真正到达。）

验算

- 当 $M = 0$ 时，公式给出 $\omega^2 = 2gma\theta/(I + ma^2)$，这是质量从滑轮上松开绳子下降的标准结果：$\omega^2$ 线性增长，与恒定角加速度的情况一致。

- 用二分法（bisection）解 $\alpha = \tan\frac{1}{2}\alpha$，得 $\alpha \approx 2.3311$（约 133.6°）和 $\sin\alpha \approx 0.7246$；在 $0 < \theta < 100$ 上对 $(1-\cos\theta)/\theta$ 作数值搜索，得出相同的最大值 0.7246。
- 对随机选取的 I, a, M, m 以数值方法逐步求解运动方程，结果与 ω^2 的公式吻合；而且当 $m/M = 0.735$ 时圆柱体永不停下，当 $m/M = 0.715$ 时则会停下。

常见错误

- 遗漏 M 或 m 的动能：两者都以速率 $a\omega$ 运动，所以有效转动惯量（moment of inertia）是 $I + (M+m)a^2$。
- 弄错 M 的高度：它上升了 $a(1-\cos\theta)$，而不是 $a\sin\theta$。
- 只证明 h 在 α 处有局部极大值，却没有检查对所有更大的 θ，h 的值都较小。

STEP 之外

这是在势场中的单自由度（one degree of freedom）运动：$\frac{1}{2}J\omega^2 + V(\theta) = 0$，其中 $V(\theta) = Mga(1-\cos\theta) - mga\theta$，是一个倾斜的“洗衣板”势（washboard potential）。从静止开始，运动会一去不返，当且仅当对每个 $\theta > 0$，V 都保持低于其初始值；同样的图像也可描述物理学中的受驱摆（driven pendulum）和约瑟夫森结（Josephson junction）。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）有讨论这类能量图。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。