详细解答

STEP III 2001，第 10 题

力学 · 相对速度

> **STEP III 2001，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q10

关键思路

相对速度（relative velocity）就是两个速度之差：A 相对于 C 的速度是 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}$。只要把两个条件都写成点积（dot product），一切便可从中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ 量起，而两个条件就化为平方差的形式。从几何角度看，这两条方程描述的是一个圆和一条直线，这正是“两个速度”这个数目的来由。

解答

两个条件

我们把船只视为在海面这个水平面上运动的质点（particle），因此所有速度都是二维向量。A 和 B 相对于 C 的速度分别是

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}.$$

大小（magnitude）相等和互相垂直（perpendicular）即是

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}|^2 \qquad 及 \qquad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = 0.$$

两条方程

设

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{d} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

于是 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{d}$ 及 $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{d}$，所以

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{w}, \qquad \mathbf{b} = -\mathbf{d} - \mathbf{w}.$$

现在利用 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{w}$，把两个条件逐一展开：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-(\mathbf{d}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{d}+\mathbf{w})=|\mathbf{w}|^2-|\mathbf{d}|^2,$$
$$|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2=(|\mathbf{d}|^2-2\mathbf{d}\cdot\mathbf{w}+|\mathbf{w}|^2)-(|\mathbf{d}|^2+2\mathbf{d}\cdot\mathbf{w}+|\mathbf{w}|^2)=-4\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{d}.$$

因此，垂直条件 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 恰好等价于 $|\mathbf{w}|^2=|\mathbf{d}|^2$，即

$$\left|\mathbf{u}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\right|^2=\left|\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\right|^2,$$

而大小相等的条件 $|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{b}|^2$ 恰好等价于 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{d}=0$，（乘以 2 后）即

$$\Big(\mathbf{u}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\Big)\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=0.$$

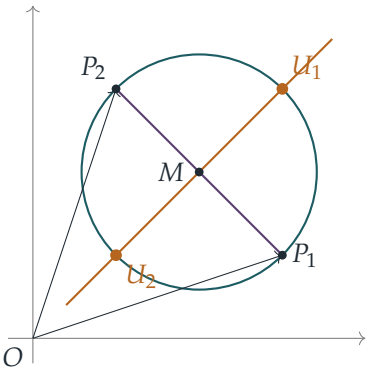
这就是所求的两条方程。以上每一步都是恒等式（identity），所以论证也可以倒过来走：两条方程成立，当且仅当两个条件成立。

为何 C 有两个可能的速度

把各个速度画成从同一个原点出发的位置向量（position vector），设 P_1、P_2、U 分别为 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{u}$ 的终点，并设 M 为 P_1P_2 的中点。

想一想 每条方程分别说明点 U 可以在甚么位置?

第一条方程说明 U 与 M 的距离是 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|$：它位于以 P_1P_2 为直径的圆上。第二条方程说明 MU 垂直于 P_1P_2（或 $U=M$）：U 位于 P_1P_2 的垂直平分线（perpendicular bisector）上。



在平面上，一条通过圆心的直线与一个半径为正数的圆恰好相交于两点，这两点位于一条直径的两端。这里的半径是 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|$，它是正数，正正因为 $\mathbf{v}_1\neq\mathbf{v}_2$。所以 C 恰好有两个可能的速度：

$$\mathbf{u}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\pm\tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\perp},$$

其中 $\mathbf{d}^{\perp}$ 是把 $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ 旋转一个直角所得的向量。（若 $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$，圆便收缩成单独一点 M，这时两个相对速度都是零，两个条件就没有甚么实质内容。）在图中，直角 P_1UP_2 就是半圆上的圆周角，而 $UP_1=UP_2$ 是因为 U 在垂直平分线上。

最后一部分

现在 $|\mathbf{v}_1|=|\mathbf{v}_2|=k$ 且 $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0$，其中 $k>0$（只有非零向量才谈得上垂直）。于是 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 互相垂直而且非零，所以它们张成（span）整个平面，我们可以写 $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2$。

利用 $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0$ 和 $|\mathbf{v}_1|^2=|\mathbf{v}_2|^2$，第二条方程给出

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{v}_1|^2-|\mathbf{v}_2|^2\right)=0,\qquad\text{所以}\qquad\alpha k^2-\beta k^2=0,$$

因此 $\beta=\alpha$。至于第一条方程，把它展开：

$$|\mathbf{u}|^2-\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|^2.$$

由于 $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=0$，$|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2|^2$ 和 $|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|^2$ 都等于 $2k^2$，所以这两项互相抵消，得 $|\mathbf{u}|^2=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$。代入 $\mathbf{u}=\alpha(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$，这就是

$$2\alpha^2k^2=2\alpha k^2\quad\Longrightarrow\quad\alpha(\alpha-1)=0.$$

所以 $\alpha=0$，得 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$；或 $\alpha=1$，得 $\mathbf{u}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$。因此若 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$，则 $\mathbf{u}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$，正如所求。

这在物理上也合情合理。若 C 静止，相对速度就是 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 本身，它们本来就满足两个条件。若 $\mathbf{u}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$，相对速度是 $-\mathbf{v}_2$ 和 $-\mathbf{v}_1$，它们同样长度相等而且互相垂直。

验算

取 $\mathbf{v}_1=(3,1)$，$\mathbf{v}_2=(1,3)$，与图中相同。公式给出 $\mathbf{u}=(2,2)\pm(1,1)$，即 $(3,3)$ 或 $(1,1)$。当 $\mathbf{u}=(3,3)$ 时，相对速度是 $(0,-2)$ 和 $(-2,0)$；当取 $(1,1)$ 时，相对速度是 $(2,0)$ 和 $(0,2)$。两对向量都长度相等而且互相垂直。用电脑测试 10^4 对随机的 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$，结果确认了两个恒等式和两个解；另外对 10^3 对随机的等长垂直向量，电脑求得的解恰好是 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$。

常见错误

- 把 A 相对于 C 的速度写成 $\mathbf{u}-\mathbf{v}_1$。正负号不影响本题的两个条件，但在大部分相对速度的题目中却至关重要。
- 忘记说明为何恰好有两个速度。这个数目取决于我们是在平面上讨论（在三维空间中，所有解构成一整个圆），也取决于半径不为零。

STEP 之外

由 $\mathbf{u}$ 转到 $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$，其实是转换参考系（reference frame）；而所有速度都平移同一个向量时相对速度不变，这个事实就是伽利略不变性（Galilean invariance），它是经典力学（classical mechanics）的起点。这里所用的“速度图”，即把速度画成点的做法，也能把碰撞和追逐问题化为几何问题。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对相对运动和参考系有仔细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。