详细解答

STEP III 2001，第 1 题

纯数学 · 麦克劳林级数

STEP III 2001，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s3-q1

关键思路

函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 就是 $\sinh^{-1} x$，而它的一阶导数（derivative）远比函数本身简单。把这个导数平方，便得到一个不含平方根的关系式 $(x^2+1)(y')^2 = 1$，再对它求导，就得到递推关系（recurrence）中 $n = 0$ 的情况。每多求导一次，递推关系便上移一步，这正是归纳法（induction）所需要的。在 $x = 0$ 处，含 x 的一项消失，递推关系把 $y^{(n+2)}(0)$ 直接与 $y^{(n)}(0)$ 连系起来，于是所有麦克劳林（Maclaurin）系数几乎唾手可得。

解答

导数

设 $s = \sqrt{x^2+1}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{s}$。留意对任意实数 x 都有 $x + s > 0$，因为 $s > \sqrt{x^2} = |x|$，所以这个对数处处有定义。由链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+s}\left(1 + \frac{x}{s}\right) = \frac{1}{x+s} \cdot \frac{s+x}{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

正如所求。

归纳法

设 $P(n)$ 为以下命题：

$$(x^2+1)\,y^{(n+2)} + (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + n^2\,y^{(n)} = 0 \quad \text{对所有实数} x.$$

基础情况，$n = 0$。我们需要证明 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$。由第一部分，$(x^2+1)(y')^2 = 1$。

对 x 求导，

$$2x(y')^2 + (x^2+1)\cdot 2y'y'' = 0.$$

由于 $y' = 1/\sqrt{x^2+1}$ 永不为零，我们可以除以 $2y'$，得到 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$。这就是 $P(0)$。（另一做法是直接对 $y' = (x^2+1)^{-1/2}$ 求导：$y'' = -x(x^2+1)^{-3/2}$，所以 $(x^2+1)y'' = -x(x^2+1)^{-1/2} = -xy'$。）

归纳步骤。假设 $P(k)$ 对某个 $k \geq 0$ 成立：

$$(x^2+1)\,y^{(k+2)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+1)} + k^2\,y^{(k)} = 0.$$

此式对所有 x 都成立，所以我们可以对它求导。对首两项运用积法则（product rule），

$$2x\,y^{(k+2)} + (x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+1)\,y^{(k+1)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+2)} + k^2\,y^{(k+1)} = 0.$$

合并同类项：

$$(x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+3)\,x\,y^{(k+2)} + (k^2+2k+1)\,y^{(k+1)} = 0,$$

而由于 $2k+3 = 2(k+1)+1$ 及 $k^2+2k+1 = (k+1)^2$，这正正就是 $P(k+1)$。

> **想一想** 为甚么 $y^{(k+2)}$ 的系数刚好增加 2?

对第一项中的 (x^2+1) 求导，会多出一个 $2x\,y^{(k+2)}$，它与第二项的 $(2k+1)x\,y^{(k+2)}$ 合并。同样地，对第二项中的 x 求导所得的 $(2k+1)$ 与 k^2 合并，而 k^2+2k+1 是一个完全平方（perfect square）。这个递推关系天生就会复制自己。

由于 $P(0)$ 成立，且对每个 $k \geq 0$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，根据归纳法，$P(n)$ 对所有 $n \geq 0$ 成立。

麦克劳林级数

在 $P(n)$ 中代入 $x = 0$。中间一项消失，剩下

$$y^{(n+2)}(0) = -n^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

我们需要两个初始值：$y(0) = \ln(0+1) = 0$ 和 $y'(0) = 1/\sqrt{1} = 1$。

偶数阶导数。由 $y(0) = 0$，递推关系给出 $y''(0) = 0$，继而 $y^{(4)}(0) = 0$，如此类推：每个偶数阶导数在 0 处都等于零。（这亦可由 y 是奇函数（odd function）推出：$y(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} + x)$，因为 $(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x) = 1$。）

奇数阶导数。由 $y'(0) = 1$ 出发，

$$y'''(0) = -1^2 \cdot y'(0) = -1,$$
$$y^{(5)}(0) = -3^2 \cdot y'''(0) = 9,$$
$$y^{(7)}(0) = -5^2 \cdot y^{(5)}(0) = -225.$$

想一想 要由 $y'''(0)$ 得到 $y^{(5)}(0)$，n 应取甚么值?

要得到 $n+2=5$ 的 $y^{(n+2)}$，我们需要 $n=3$，所以因子是 $-3^2=-9$，而不是 -5^2。这个因子用的是较低阶导数的阶数。

因此麦克劳林级数（Maclaurin series）$y=\sum y^{(k)}(0)\,x^k/k!$ 为

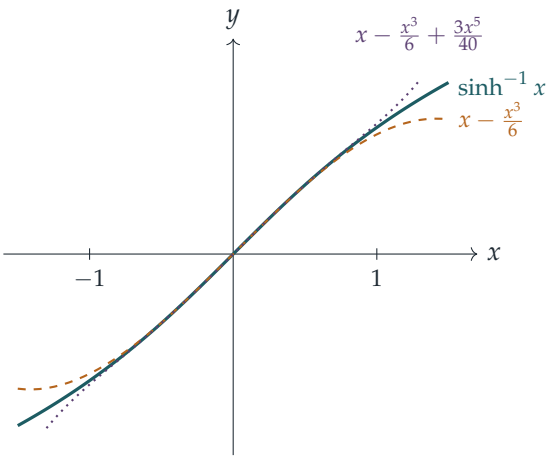
$$\begin{aligned} y &= x+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+\frac{-225}{7!}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{120}x^5-\frac{225}{5040}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\cdots, \end{aligned}$$

其开首各项与题目所求相符，而下一个非零项是

$$-\frac{5x^7}{112}.$$

另一途径。把二项式级数（binomial series）$(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$ 逐项积分（对 $|x|<1$ 成立），并利用 $y(0)=0$，便得到 $x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\cdots$，结果一致。

下图显示部分和（partial sums）在原点附近如何紧贴 $y=\sinh^{-1}x$，而在较远处则交替地偏高和偏低。



验算

- 当 $x=0.1$ 时，$\ln\left(0.1+\sqrt{1.01}\right)=0.0998340789$，而 $x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}=0.0998340789$ 亦然；两者之差约为 3×10^{-11}，即下一项（x^9 项）的大小。

- $n=0$ 的情况很容易在 $x=1$ 处检验：$y'=1/\sqrt{2}$ 而 $y''=-1/(2\sqrt{2})$，所以 $2y''+y'=0$。
- 在 0 处的奇数阶导数为 $1,-1,9,-225$，即 $(-1)^m\big(1\cdot 3\cdots(2m-1)\big)^2$：这是一个赏心悦目、值得留意的规律。

常见错误

- 在 $y^{(n+2)}(0)=-n^2y^{(n)}(0)$ 中用错了 n，得出因子 $-9,-25,-49$，而不是 $-1,-9,-25$。
- 忘记除以 $k!$：x^7 的系数是 $-225/5040$，而不是 -225。
- 在归纳步骤中，漏掉了对 x^2+1 求导所产生的 $2x\,y^{(k+2)}$。

STEP 之外

泰勒级数（Taylor series）只在它收敛（converge）的地方才有用，而这个级数恰好在 $|x|\le 1$ 时收敛，尽管 $\sinh^{-1}x$ 在整条实数线上都十分光滑。个中原因藏在复平面（complex plane）上：$1/\sqrt{1+z^2}$ 在 $z=\pm\mathrm{i}$ 处趋于无穷，这两点与原点的距离为 1，而这个距离就是收敛半径（radius of convergence）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（视觉化复分析）对此有精彩的解释；至于泰勒定理（Taylor's theorem）及其余项在实变量方面的论述，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（理解分析学）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。