详细解答

STEP II 2001，第 9 题

力学 · 二次空气阻力

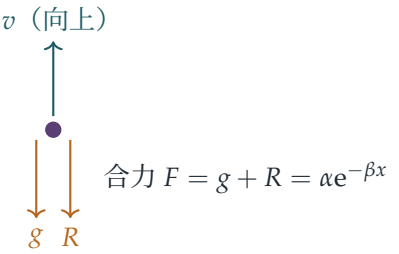
> **STEP II 2001，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q9

关键思路

题目给出的力是高度的函数，而不是时间的函数，所以最自然的工具是功能原理（work–energy principle）：质点在上升过程中克服 F 所作的功，恰好等于它损失的动能（kinetic energy）。这样就把 $\mathrm{e}^{-\beta x}$ 与 v^2 联系起来，而所得结果显示空气阻力（air resistance）只取决于速率。一旦知道阻力与速率的关系，下落的过程就是一条关于 v^2 的标准微分方程（differential equation）。

解答

模型。 质点的质量为一个单位，沿一条铅垂线运动。上升时，重力和空气阻力都向下作用，与运动方向相反，所以合力 F（大小为 $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$）向下作用。取 x 为由抛射点起向上量度的高度。



所耗的能量

到达高度 x 时所耗的能量，就是克服 F 所作的功：

$$\int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\beta s}\,\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big).$$

这些能量来自质点的动能，所以根据功能原理（单位质量）

$$\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big). \qquad (*)$$

（等价地，把牛顿第二定律（Newton's second law）写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ 的形式，再由 $x=0$、$v=u$ 起积分，也会得到同一条方程。）

以速率表示的力

把 $(*)$ 乘以 β 并整理：

$$\alpha - \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta u^2 - \tfrac{1}{2}\beta v^2 \quad\Longrightarrow\quad F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2,$$

这正是所要求的结果。

想一想 为甚么必定有 $\alpha = \frac{1}{2}\beta u^2 + g$？题目中似乎没有任何条件迫使它成立。

把 F 分成两部分：$F = g + R$，其中 R 是空气阻力。于是

$$R = F - g = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \Big(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 - g\Big).$$

所以阻力只是速率的函数：一个 v^2 项加上一个常数。空气阻力是由物体在空气中运动而产生的，所以当质点在最高点瞬间静止时，阻力必定为零。在该处代入 $v=0$，得 $R=0$，所以 $F=g$（只有重力作用），而且

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 = g, \qquad \text{即} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\beta u^2 + g.$$

因此常数项为零，阻力定律就简单地是

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

（顺带一提，最高点就是 $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = g$ 之处，高度为 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$。）

下落的过程

假设无论运动方向如何，同一条阻力定律 $R = \frac{1}{2}\beta v^2$ 都成立；下落时阻力向上作用，与运动方向相反，而重力仍然向下作用。设 y 为质点在最高点以下的距离，v 为向下的速率，并且在 $y=0$ 时 $v=0$。取向下为正，由牛顿第二定律（单位质量）得：

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

由于 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(v^2)$，设 $w = v^2$：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = 2g - \beta w, \qquad w = 0, \text{ 当} y = 0.$$

这是一条常系数线性方程（也可以用分离变量法）：其解为

$$w = \frac{2g}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right),$$

它确实满足 $w(0) = 0$ 和 $w' = 2g\mathrm{e}^{-\beta y} = 2g - \beta w$。因此，在最高点以下距离 y 处的空气阻力为

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2 = g\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right).$$

验算

当 $y \to \infty$ 时，$R \to g$：质点趋近终端速率（terminal speed）$\sqrt{2g/\beta}$，此时阻力与重力平衡。在 $y = 0$ 处，$R = 0$，与质点静止时应有的情况相符。上升时，在 $x = 0$ 处公式给出 $F = \alpha = g + \frac{1}{2}\beta u^2$，即重力加上速率为 u 时的阻力。数值上，取 $g = 9.8$、$\beta = 0.1$、$u = 20$（所以 $\alpha = 29.8$），用龙格－库塔法（Runge–Kutta method）逐步计算运动方程，所得结果与上升时的 $F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ 和下落时的 $R = g(1 - \mathrm{e}^{-\beta y})$ 相符，误差约为 10^{-12}，而质点到达的最高高度 ≈ 11.12，与 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$ 吻合。

常见错误

- 把 F 当作只是空气阻力：它是合力，所以必须减去重力才得到 R。
- 下落时仍然沿用相同的阻力符号：阻力总是与运动方向相反，所以此时它向上作用，方程变为 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \frac{1}{2}\beta v^2$。
- 以 v 表示答案，或以 u 和 α 表示答案；题目要求只以 y、g 和 β 表示 R。

STEP 之外

二次阻力（quadratic drag）$R \propto v^2$ 是描述物体在空气中高速运动的切合实际的模型，而这道题展示了一个巧妙的技巧：以距离为自变量时，v^2 所满足的方程是线性的，尽管以时间为自变量时 v 所满足的方程并非线性。大学本科的力学课程还会探讨先上升后下落这个问题的不对称性：质点返回起点时的速率小于 u，而下落所需的时间比上升长。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）详细讨论了取决于速度的力和终端速度。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。