详细解答

STEP II 2001，第 8 题

纯数学 · 周期函数与常微分方程

STEP II 2001，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s2-q8

关键思路

周期（period）为 1 的函数，在每一个长度为 1 的区间上的形状都相同，所以它在任何这样的区间上的积分都是同一个数。因此 F 每次增加的量都相同，都是 $F(1)$，只要 x 增加 1。最后一部分的微分方程（differential equation）是一阶线性的，所以利用积分因子（integrating factor）便可把它的解化为 $-F(x)$ 的指数函数，其余的结论则由 $F(1)$ 为正数这一事实推出。

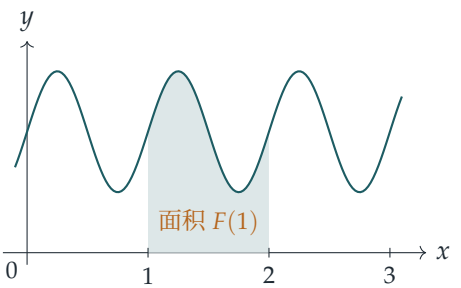
解答

第 (i) 部分

取

$$f(x) = 2 + \sin(2\pi x).$$

由于 sin 的周期为 2π，$\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$，所以 $f(x+1) = f(x)$。另外 $\sin(2\pi x) \geq -1$，故对每一个 x 都有 $f(x) \geq 1 > 0$。（常数函数如 $f(x) = 1$ 也符合要求，但没那么有趣。）



图像下方每一条单位阔度的长条，面积都相同；第 (ii) 部分说的就是这回事。

第 (ii) 部分

定义 $G(x) = F(x+1) - F(x)$。求导，并对第一项使用链式法则（chain rule），得

$$G'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

对所有 x 成立，这是由 f 的周期性得出的。所以 G 是常数，其值为 $G(0) = F(1) - F(0) = F(1)$，因为 $F(0) = 0$。也就是说，

$$F(x+1) = F(x) + F(1) \quad \text{对所有} x.$$

现在对 n 使用归纳法（induction）。当 $n = 1$ 时，命题 $F(1) = 1 \cdot F(1)$ 显然成立。若对某个正整数 k 有 $F(k) = kF(1)$，则在上式中代入 $x = k$，得

$$F(k+1) = F(k) + F(1) = kF(1) + F(1) = (k+1)F(1).$$

因此对每一个正整数 n 都有 $F(n) = nF(1)$，命题得证。

（等价的做法是：若 f 连续，则 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，而 $F(n)$ 是 n 个在 $[k, k+1]$ 上的积分之和，每一个积分经代换（substitution）$t \mapsto t + k$ 后都等于 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$。上面的论证则完全不必把 F 写成积分。）

第 (iii) 部分

这个方程对 y 而言是线性的，积分因子为 $\mathrm{e}^{\int f\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{F(x)}$，$F$ 就是在这里出场的。事实上，由乘积法则（product rule）及 $F' = f$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{F(x)}\right) = \mathrm{e}^{F(x)}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\,y\right) = 0.$$

所以 $y\,\mathrm{e}^{F(x)}$ 是常数。在 $x = 0$ 时它等于 $1 \cdot \mathrm{e}^{F(0)} = 1$，故

$$y = \mathrm{e}^{-F(x)}.$$

由第 (ii) 部分，对每一个正整数 n，

$$y(n) = \mathrm{e}^{-F(n)} = \mathrm{e}^{-nF(1)} = \left(\mathrm{e}^{-F(1)}\right)^n.$$

? **想一想** 我们怎样知道 $F(1) > 0$？题目并没有直接告诉我们任何关于 $F(1)$ 的资料。

由于对所有 x 都有 $F'(x) = f(x) > 0$，F 是严格递增（strictly increasing）的，所以 $F(1) > F(0) = 0$。（如果你较喜欢用积分来想：$F(1)$ 是一条正值曲线在 0 与 1 之间下方的面积。）

因此 $0 < \mathrm{e}^{-F(1)} < 1$，而一个满足 $0 < r < 1$ 的固定数 r 必有 $r^n \to 0$（当 $n \to \infty$ 时）。于是 $y(n) \to 0$（当 $n \to \infty$ 时），这正是我们要证明的。

留意我们只声称这个结论沿整数成立。在整数与整数之间，y 被夹住了：由于 F 递增，y 便递减，所以事实上 $y(x) \to 0$ 在 $x \to \infty$ 取遍所有实数值时同样成立。

验算

取 $f(x) = 2 + \sin(2\pi x)$，则 $F(1) = \int_0^1 (2 + \sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 2$，因为正弦函数在一个完整周期上的积分为零。用辛普森法则（Simpson's rule）计算，$F(2), F(3), F(5), F(7)$ 分别等于 $4, 6, 10, 14$，误差小于 10^{-12}。以数值方法（四阶龙格—库塔法，Runge–Kutta）逐步求解这个微分方程，由 $y(0) = 1$ 出发，得 $y(1) \approx 0.135335 = \mathrm{e}^{-2}$ 及 $y(4) \approx 3.3546 \times 10^{-4} = \mathrm{e}^{-8}$，与 $\mathrm{e}^{-nF(1)}$ 吻合。我们亦在非整数的 x 处验证了 $F(x+1) - F(x) = F(1)$，所用的是对称性较低的例子 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2\pi x} + 0.1$。

常见错误

- 把 $F(n) = nF(1)$ 当作由周期性“显然”得出的结论，却没有说明为何 $[k, k+1]$ 上的面积等于 $[0,1]$ 上的面积。这里必须用到函数 $G(x) = F(x+1) - F(x)$ 或代换。
- 忘记说明为何 $F(1) > 0$。没有这一点，$\mathrm{e}^{-nF(1)}$ 可能一直停留在 1，甚至趋向无穷大。
- 弄错积分因子的正负号，最后得出 $y = \mathrm{e}^{F(x)}$，它会增长而不是衰减。

STEP 之外

这是弗洛凯理论（Floquet theory）最简单的情形：对于系数具周期性的线性微分方程，经过一个周期之后的解，等于初始值乘以一个固定的因子（这里是 $\mathrm{e}^{-F(1)}$），所以长远的变化取决于这个因子是小于还是大于 1。同样的想法，把数换成矩阵，便可解释支点被上下摇动的单摆的稳定性。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）对线性方程和积分因子有详尽的讲解，很适合作为下一步的读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。