详细解答

STEP II 2001，第 7 题

纯数学 · 复数与旋转

STEP II 2001，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s2-q7

关键思路

沿着正多边形（regular polygon）绕一圈，每条边的长度都相同，而在每个顶点转过的都是同一个外角（exterior angle）。在阿根图（Argand diagram）上，转过角 θ 相当于乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，所以每条边都是前一条边乘以一个固定的复数（complex number）。一旦求出各顶点，圆心便可由垂直平分线（perpendicular bisector）求得，而旋转（rotation）只不过是再乘一次 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。

解答

求 Q 和 S

每个顶点的内角（interior angle）是 $5\pi/6$，所以在每个顶点，前进方向转过的是外角 $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$。由于多边形位于上半平面，而我们由 O 出发，沿正实轴走到 P，所以每次都必须向逆时针（anticlockwise）方向转（若在 P 顺时针转，Q 便会落在实轴之下）。设 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$。边 $\overrightarrow{OP}$ 就是复数 2，而其后每条边都是前一条边乘以 ω（长度不变，转过 $\pi/6$）。因此

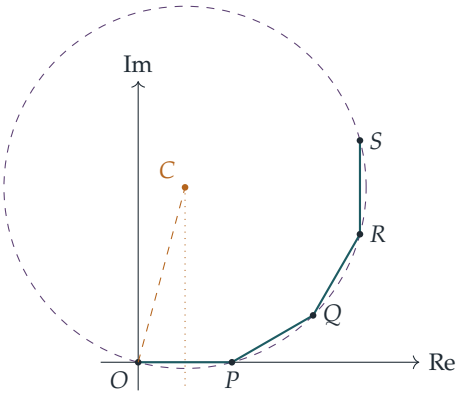
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= 2\omega = \sqrt{3} + \mathrm{i},\\ \overrightarrow{QR} &= 2\omega^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i},\\ \overrightarrow{RS} &= 2\omega^3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

逐一相加，

$$\begin{aligned} Q &= 2 + (\sqrt{3} + \mathrm{i}) = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \\ R &= Q + 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})\mathrm{i}, \\ S &= R + 2\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})\mathrm{i}. \end{aligned}$$

第一行就是题目要求的 Q 值，而

$$S = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i}).$$



圆心 C

通过 O、P、Q 的圆就是整个正十二边形的外接圆（circumcircle），所以 C 是这个多边形的中心。由于 C 与 O 和 $P = 2$ 等距，它位于垂直平分线 $\operatorname{Re} z = 1$ 上；设 $C = 1 + h\mathrm{i}$。它与 O 和 Q 亦等距：

$$\begin{aligned} |C|^2 = |C - Q|^2 &\iff 1 + h^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (h - 1)^2 \\ &\iff 1 + h^2 = 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h + 1 \\ &\iff 2h = 4 + 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

所以 $h = 2 + \sqrt{3}$，而 $C = 1 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$，位于第一象限。

> ? **想一想** C 的辐角（argument）的准确值是甚么？

我们需要 $\tan(\arg C) = 2 + \sqrt{3}$。现在

$$\tan \tfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

而 C 在第一象限，所以 $\arg C = 5\pi/12$。（从几何角度看：三角形 OCP 是等腰三角形，在 C 的顶角为 $2\pi/12$，所以两个底角都是 $\frac{1}{2}(\pi - \pi/6) = 5\pi/12$。）

旋转

绕 O 逆时针旋转角 θ，相当于把每一点乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，所以 C 会移到辐角为 $5\pi/12+\theta$ 的位置。要 C 落在实轴上，$5\pi/12+\theta$ 必须是 π 的倍数；最小的正数 θ 是

$$\theta = \pi - \tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{7\pi}{12},$$

这时 C 落在负实轴上。

现在把 S 写成模—辐角形式（modulus–argument form）：$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，所以 $S = (3+\sqrt{3})\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$。$S$ 的新位置是

$$\begin{aligned} S' = S\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12} &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\pi/12+7\pi/12)} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} \\ &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\mathrm{i}), \end{aligned}$$

正是所求。

验算

- $|C|^2 = 1+(2+\sqrt{3})^2 = 8+4\sqrt{3} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$，而 $|C-S|^2 = (2+\sqrt{3})^2+1$ 亦相同，所以 S 确实在同一个圆上。
- $|S'| = 3\sqrt{2}+\sqrt{6} = |S|$，旋转理应保持模不变。
- 数值上 $S \approx 4.732+4.732\mathrm{i}$，而 $S' \approx -5.7956+3.3461\mathrm{i}$；电脑验证了所有边长、各个 $5\pi/6$ 的角，以及 $7\pi/12$ 确是逆时针旋转时第一个令 C 落在实轴上的角。

常见错误

- 转了内角 $5\pi/6$，而不是外角 $\pi/6$。
- 旋转了 $-5\pi/12$（顺时针），或旋转了 $\pi/2-5\pi/12$：旋转是逆时针的，而 C 首次碰到实轴是在负半轴上。

STEP 之外

把乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 看成旋转，是把复函数视为几何变换（geometric transformation）的起点：$z \mapsto az+b$ 可给出平面上所有旋转、放大（enlargement）和平移（translation），而这些变换构成一个群（group）。正多边形的顶点是等比级数的和（geometric sum）$2(1+\omega+\cdots+\omega^{k-1})$，与单位根（roots of unity）息息相关。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种几何观点发挥得淋漓尽致。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。