详细解答

STEP II 2001，第 6 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2001，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s2-q6

关键思路

看似棘手的 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ 其实只是 $\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$ 的另一种写法：它就是把正切的差角公式（tangent subtraction formula）倒过来读。一旦看穿这一点，第 (i) 部分便化为一次分部积分（integration by parts），而且刚好落在开首的积分上。第 (ii) 部分看来毫不相干，但映射 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 把 0 和 1 互换，而且它是自身的逆映射，所以用它作代换（substitution），便可把 (ii) 变回 (i)。

解答

开首的积分

以 $1+x^2$ 除 x^4（或写成 $x^4=(x^4-1)+1=(x^2-1)(x^2+1)+1$），得

$$\frac{x^4}{1+x^2}=x^2-1+\frac{1}{1+x^2}.$$

因此

$$\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{3}x^3-x+\tan^{-1}x\right]_0^1=\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3},$$

正是所求。

第 (i) 部分

设 $\theta=\tan^{-1}x$，则当 $0\le x\le 1$ 时，有 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$。由差角公式，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\frac{1-x}{1+x}.$$

想一想 有了 $\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{1-x}{1+x}$，是否真的就可以写 $\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})=\frac{\pi}{4}-\theta$?

只有当 $\frac{\pi}{4}-\theta$ 落在 $\tan^{-1}$ 的值域（range）$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 之内才可以。这里 $0\le\frac{\pi}{4}-\theta\le\frac{\pi}{4}$，所以条件成立，于是在整个积分区间上

$$\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x.$$

因此

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-J,$$

其中 $J=\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$。取 $u=\tan^{-1}x$ 及 $\mathrm{d}v=x^3\,\mathrm{d}x$（于是 $v=\frac{1}{4}x^4$ 而 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$）作分部积分：

$$\begin{aligned}J&=\Big[\tfrac{1}{4}x^4\tan^{-1}x\Big]_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

当中用了开首的结果。因此

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}.$$

第 (ii) 部分

想一想 那个古怪的权重 $\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}$ 是从哪里来的?

它正是 $x^3\,\mathrm{d}x$ 在同一个变换下所变成的样子。代入 $y=\frac{1-x}{1+x}$，解出 $x=\frac{1-y}{1+y}$：这个映射是自身的逆映射，并把 $x=0$ 送到 $y=1$，把 $x=1$ 送到 $y=0$。于是

$$1-y=\frac{2x}{1+x},\qquad 1+y=\frac{2}{1+x},\qquad \mathrm{d}y=-\frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\,\mathrm{d}y=\frac{8x^3}{(1+x)^3}\cdot\frac{(1+x)^5}{32}\cdot\Big(-\frac{2}{(1+x)^2}\Big)\mathrm{d}x=-\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x,$$

而 $\tan^{-1}y=\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})$。把积分上下限对调，负号便被抵销（$y$ 由 0 到 1 即 x 由 1 到 0）：

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\tan^{-1}y\,\mathrm{d}y&=\int_1^0\Big(-\frac{x^3}{2}\Big)\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\Big)=\frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

这里用了第 (i) 部分的结果。

验算

- 两个答案都是正数，这是必然的（每个被积函数（integrand）在 $[0,1]$ 上均非负）：$\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\approx 0.02968$ 及 $\frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}\approx 0.01484$。对原来的被积函数使用辛普森法则(Simpson's rule)，结果吻合至小数点后 12 位。
- (ii) 的答案恰好是 (i) 的一半，你可以在动手做任何代数运算之前，先用数值方法粗略核对一下。
- 在恒等式中代入 $x=0$：$\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$。代入 $x=1$：$\tan^{-1}0=0$。两者都与 $\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$ 相符。

常见错误

- 在 (ii) 中漏掉 $\mathrm{d}y$，或处理错正负号：因子 $-\frac{2}{(1+x)^2}$ 与对调后的上下限，两者的负号互相抵销。
- 未检查值域便写下 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$；当 $x<-1$ 时此式并不成立（两边相差 π）。

STEP 之外

代换 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation），即形如 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 的映射。这些映射在复合（composition）运算下构成一个群（group），而这一个的阶（order）为二。同样的技巧，配合对称性，可得出著名的结果 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$，值得接着一试。莫比乌斯映射在复分析（complex analysis）中占有核心地位；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）对它们有一番优美的几何阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。