详细解答

STEP II 2001，第 5 题

纯数学 · 驻点与积分

STEP II 2001，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s2-q5

关键思路

驻点（stationary point）可直接由斜率（gradient）求得：它们位于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 之处，而其性质则取决于斜率的正负号如何变化。由于指数因子恒为正，斜率的正负号只取决于多项式因子 $x(1-x^2)$，而这个因子对两条曲线都相同。至于高度，第一个斜率可以准确地积分（留意 $u = x^2$）；第二个则不能，但我们并不需要它的值，只需比较两个积分。

解答

曲线 C_1

由于对所有 x 都有 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$，斜率为零当且仅当 $x(1-x^2) = x(1-x)(1+x) = 0$，即 $x = -1$、0 及 1。此外，斜率的正负号与 $x(1-x)(1+x)$ 相同：

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的正负号	$+$	$-$	$+$	$-$

在 $x = 0$ 处，斜率由负变正，所以原点（它在曲线上）是极小点（minimum）。在 $x = 1$ 处，斜率由正变负，所以这是极大点（maximum）；同理，$x = -1$ 也是极大点。

要求出高度，我们进行积分。由于曲线通过原点，

$$y = \int_0^x t(1-t^2)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

想一想 怎样对 $t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ 积分？

因子 t 旁边是一个 t^2 的函数，这提示我们用代换（substitution）$u = t^2$，$\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$：

$$y = \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} (1-u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

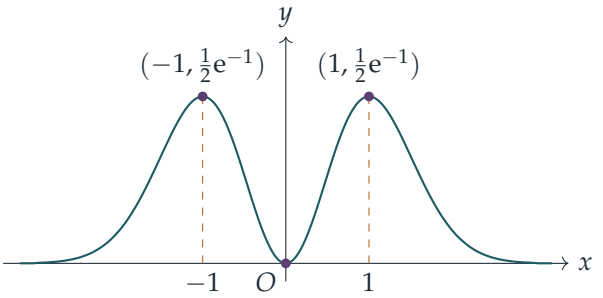
现在留意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u\mathrm{e}^{-u}) = \mathrm{e}^{-u} - u\mathrm{e}^{-u} = (1-u)\mathrm{e}^{-u}$（用分部积分法（integration by parts）也会得到同样的结果）。因此

$$y = \tfrac{1}{2}\Big[u\,\mathrm{e}^{-u}\Big]_0^{x^2} = \tfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

在 $x = 1$ 处，这给出 $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，所以极大点位于 $(1, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1})$，正如题目所求。由于 y 是 x 的偶函数（even function），另一个驻点是极大点

$$(-1, \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}).$$

草图。 由 $y = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 可知：曲线关于 y 轴对称；$y \geq 0$，且只在原点取等号；又因为指数函数衰减的速度比 x^2 增长的速度快，当 $x \to \pm\infty$ 时 $y \to 0$。所以这是一条“双峰”曲线：它在原点与 x 轴相切，上升至 $x = \pm 1$ 处两个等高的极大点（高度为 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.18$），然后在两边逐渐下降，趋向 x 轴。（下图的纵向比例经过放大。）



曲线 C_2

同样，对所有 x 都有 $\mathrm{e}^{-x^3} > 0$，所以斜率恰好在 $x = -1, 0, 1$ 处为零，而且正负号与 $x(1-x)(1+x)$ 相同，得出的正负号表与之前完全一样。所以原点（按题设在曲线上）是极小点，而 $x = 1$ 处的驻点是极大点。（$x = -1$ 处的驻点也是极大点，不过题目没有问及。）

它的高度是

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

这个积分没有初等原函数（elementary antiderivative），所以我们改为把它与 C_1 的积分比较，而我们已知后者等于 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$。

想一想 怎样可以不计算 k 的值，而把 k 与 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ 比较?

比较被积函数（integrand）。当 $0 < x < 1$ 时，我们有 $x^3 < x^2$（把 $x < 1$ 两边乘以 $x^2 > 0$），所以 $-x^3 > -x^2$；又因为 e^t 是递增函数，故 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$。此外，在这个范围内 $x(1-x^2) > 0$，所以乘上它之后不等式的方向不变：

$$x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3} > x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{当} 0 < x < 1.$$

两个被积函数在 $[0,1]$ 上都连续，而不等式在开区间上严格成立，所以在 $[0,1]$ 上积分会得到严格不等式（strict inequality）：

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

最后一个等式就是上面求得的 C_1 在 $x = 1$ 处的高度。所以极大点位于 $(1,k)$，其中 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，正如题目所求。

验算

用积法则（product rule）对 $\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 求导，得 $x\mathrm{e}^{-x^2} - x^3\mathrm{e}^{-x^2} = x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$，而它在 $x = 0$ 处的值为 0，所以 C_1 的结果正确。二阶导数（second derivative）印证了驻点的分类：对两条曲线都有 $y''(0) = 1 > 0$ 及 $y''(1) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$。以数值方法（森逊法则（Simpson's rule））计算，$k \approx 0.2034$，而 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.1839$。

常见错误

- 忘记积分常数（constant of integration）：正是“通过原点”这个条件确定了它的值，而它对高度有影响。
- 只凭 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$ 就声称 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，却没有指出 $x(1-x^2)$ 在 $(0,1)$ 上为正；若乘上的是负因子，不等式的方向便会倒转。
- 说 $x^3 < x^2$ “对所有 x 成立”：它只在 $x < 1$、$x \neq 0$ 时成立，这正是为甚么区间 $[0,1]$ 恰好符合我们所需。

STEP 之外

第二部分是一个比较论证（comparison argument）：对于一个写不出来的解，我们把它与一个写得出来的解比较，从而了解它的一些性质。这个想法贯穿整个微分方程（differential equations）理论，当中的比较定理（comparison theorem）以较简单方程的解来界定棘

手方程的解的范围；它也贯穿分析学（analysis），当中积分的单调性（monotonicity）是一件基本工具。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）是个好去处，可以让你看到即使没有公式，也能从定性的角度对解作出多少论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。